Bellavista, 18 de abril, 2022

Señor(a):

RESOLUCIÓN DECANAL Nº 057-2-2022-D-FCNM. - Bellavista, 18 de abril 2022.- EL DECANO DE LA FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA DE LA UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

Visto el Oficio N°12-2022-UI-FCNM, con fecha Bellavista 30 de marzo del 2022, por medio del cual el Bachiller en Matemática CHECCALLE VENTURO Juan Luis, solicita designar el Jurado Evaluador de tesis para titulación profesional con el fin de titularse por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis.

CONSIDERANDO:

Que, mediante Resolución del Consejo Universitario Nº 245-2018-CU de fecha 30 de octubre del año 2018, se aprobó el Reglamento de Grados y Títulos de Pregrado de la Universidad Nacional del Callao;

Que, en el Art. 73° del precitado Reglamento, establece los requisitos y procedimientos para solicitar aprobación del Proyecto de tesis, sin Ciclo de Tesis, designación de Jurado Evaluador y del Profesor Asesor;

Que, mediante los Artículos 24º, 25° y 26° del Capítulo I JURADOS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE BACHILLER, TÍTULO PROFESIONAL, TÍTULO DE SEGUNDA PROFESIÓN O TÍTULO DE SEGUNDA ESPECIALIDAD PROFESIONAL del acotado Reglamento, establecen que el Jurado Evaluador es propuesto por el Comité Directivo de la Unidad de Investigación de la Facultad, los docentes miembros deben ser nombrados o contratados a TC o DE y debe estar integrado por tres (03) docentes titulares y un (01) docente suplente; el presidente, es el docente ordinario de mayor categoría y antigüedad entre los miembros propuestos; el secretario y vocal son designados en orden de prelación decreciente; el profesor asesor elegido por el bachiller en este caso es el profesor **. Dr. ALFREDO SOTELO PEJERREY**;

Que, estando vigente el Estado de Emergencia Nacional y de Aislamiento Social Obligatorio establecido en el marco del Decreto de Urgencia N° 026-2020 por las graves circunstancias que afectan la vida de la Nación a consecuencia del brote del COVID-19. Se ha emitido la Resolución de Consejo Universitario N° 068-2020-CU, de fecha 25 de marzo de 2020, mediante la cual se resuelve "autorizar con eficacia anticipada, del 16 de marzo de 2020, y hasta que concluya el estado de emergencia nacional, la modificación del lugar de la prestación de servicios docentes y administrativos;

Que, en efecto, corrido el trámite de la solicitud del recurrente, el Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, mediante Oficio Nº 12-2022-UI-FCNM recibido en forma virtual el 30 de marzo 2022, comunica que el Proyecto de Investigación del graduando ha sido evaluado por el Comité Directivo de la Unidad de Investigación, consecuentemente se encuentra óptimo en cuanto a los requisitos señalados por las directivas vigentes proponiendo, al mismo tiempo, el Jurado Evaluador del Proyecto de Investigación titulado: "**UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER**"

Estando al documento del visto y lo glosado, con cargo a dar cuenta al Consejo de Facultad; y, en uso de las atribuciones le confiere el Artículo 187° y 189° del Estatuto de la Universidad Nacional del Callao y al numeral; 70.2 del Art. 70° de la Ley Universitaria, Ley N° 30220;

RESUELVE:

1º. **DESIGNAR,** Jurado Evaluador de Tesis para obtener el título profesional de Licenciado en Matemática, por la modalidad de tesis sin ciclo de tesis, titulado: "**UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER**" presentado por el Bachiller CHECCALLE VENTURO, Juan Luis, Jurado que está integrado por los siguientes profesores:

Mg. Medina Aparcana, Ruth	: Presidente
Lic. Ávila Célis, Cesar Augusto	: Vocal
Lic. Castillo Valdivieso, Absalón	: Secretario
Mg. Vidal Guzmán, Roel Mario	: Suplente

2º. **RECOMENDAR**, que dicho Jurado debe remitir su dictamen colegiado al Decano de la Facultad, dentro del plazo máximo de quince (15) días calendarios, contados a partir de la fecha de recepción del expediente y de la presente Resolución, de acuerdo con las normas reglamentarias vigentes sobre la materia.

3º. **TRANSCRIBIR**, la presente Resolución al Jurado Evaluador, profesor asesor, Escuela Profesional y Departamento Académico de Matemática, Unidad de Investigación e interesado, para conocimiento y fines.

REGÍSTRESE, COMUNÍQUESE Y ARCHÍVESE

Fdo. **Dr. JUAN ABRAHAM MÉNDEZ VELÁSQUEZ**. -Decano y Presidente del Consejo de Facultad de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao.

Fdo. **Mg. GUSTAVO ALBERTO ALTAMIZA CHÁVEZ**.-Secretario Académico
Lo que transcribo a usted para los fines pertinentes.

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

PROVEÍDO N°178-2022-D-FCNM

Ref. : **Oficio N°12-2022-UI-FCNM**
Designación de Jurado de Tesis
Bach. Checcalle Venturo Juan Luis
Escuela Profesional de Matemática
Expediente: N°298-2021-MP-FCNM (07 Folios)

PASE, el documento de la referencia, a la **Oficina de Secretaria Académica de la FCNM**, para su conocimiento y expedición de la resolución correspondiente.

Bellavista, 02 de abril de 2022

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan Abraham Méndez Velásquez
Decano

JAMV/hc
Archivo

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
UNIDAD DE INVESTIGACIÓN

"AÑO DEL FORTALECIMIENTO DE LA SOBERANÍA NACIONAL"

OFICIO Nº 12-2022-UI-FCNM

Bellavista, marzo 30, 2022

Señor Doctor
JUAN A. MÉNDEZ VELÁSQUEZ
Decano de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Presente. –

Asunto: *Jurado Evaluador de Tesis.*

Referencia: **PROVEÍDO N° 055-2022-D-FCNM**
Bach. **Checcalle Venturo Juan Luís**
Escuela Profesional de Matemática
Expediente: N°298-2021-MP-FCNM

De mi consideración:

Tengo a bien saludarlo por medio del presente y a la vez informarle que, el Director de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, después de revisar la Tesis Titulada: ***"UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER"*** *presentada* por el Bachiller ***Juan Luís Checcalle Venturo*** *de la Escuela Profesional de Matemática, resuelve lo siguiente:*

1. Designar el Jurado Evaluador de tesis para titulación profesional, integrado por:

   - Mg. Medina Aparcana, Ruth : Presidente
   - Lic. Ávila Celis, Cesar Augusto : Vocal
   - Lic. Castillo Valdivieso, Absalón : Secretario
   - Mg. Vidal Guzmán, Roel Mario : Suplente

   para emitir opinión respecto **a** la tesis titulada: ***"UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER"*** presentada por el Bachiller *Juan Luis Checcalle Venturo*, de la Escuela Profesional de Matemática.
   Si el Jurado Evaluador emite una opinión favorable, deberá indicar lugar y fecha de sustentación de la Tesis en un plazo no mayo de 15 días.
   La tesis se inscribirá en el Libro de Registro de Tesis de la Unidad de Investigación de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática, una vez emitida la Resolución Decanal de aprobación correspondiente.

2. Adjunto documentación para su atención en archivo virtual, y asimismo para el trámite consiguiente.

Agradeciendo su deferencia al presente, quedo de usted.

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. WHUALKUER LOZANO BARTRA
Director

c.c.: ***Archivo***

FOLIO 6

PROVEÍDO Nº -055-2022-D-FCNM

Ref.: Solicitud de designación de Jurado de Sustentación
Bach. CHECCALLE VENTURO JUAN LUIS
Escuela Profesional de Matemática
Expediente Nº 298-2021-MP-FCNM - 08 folios
==

PASE, el expediente de la referencia, en archivo virtual, perteneciente al Bach. **CHECCALLE VENTURO JUAN LUIS** a la Unidad de Investigación de la FCNM, para su atención, teniendo en cuenta el Flujograma respectivos de los Procedimientos de Grados y Títulos vigente, debiendo devolverse, sin mutilaciones, para el trámite consiguiente.

B.14.02.22

Atentamente,

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

Dr. Juan A. Méndez Velásquez
Decano

sr/

c.c.: Archivo

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

ESCUELA PROFESIONAL DE MATEMATICA

FORMATO ÚNICO DE TRÁMITE

FOLIO 01

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO
FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA
MESA DE PARTES
Fecha: 14.02.22 Exp. 298.2022-MP-FCNM
Hora: 08:15

DIRIGIDO A:

DR. MÉNDEZ VELÁSQUEZ JUAN ABRAHAM

DECANO

DATOS DEL RECURRENTE:

NOMBRES	: JUAN LUIS	D.N. I	: 71985033
APELLIDOS	: CHECCALLE VENTURO	CÓDIGO	: 101256A
FACULTAD	: CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA	ESCUELA	: MATEMATICA
DOMICILIO	: Manzana E5, Lote 18 - - VENTANILLA - CALLAO - CALLAO - PERU		
CORREO	: jluis_mate@hotmail.com	CELULAR	: 928947266

RELACIÓN CON LA INSTITUCIÓN:

ALUMNO ☐ EGRESADO ☒ DOCENTE ☐ OTROS ☐

TRÁMITE A REALIZAR:

DERECHO DE SUSTENTACION DE TESIS

DESCRIPCIÓN DEL TRÁMITE:	TARIFA A CANCELAR
solicito la designación del jurado de sustentación, aprobación de la tesis y programación de lugar, fecha y hora para la sustentación. GRACIAS.	S/ 372

DOCUMENTOS ADJUNTOS:

N°	NOMBRE	¿ADJUNTÓ?
1	COPIA DE RECIBO DE PAGO A LA FACULTAD DE NATEMATICA	SI
2	DECLARACIÓN JURADA DE BACHILLER	SI

Fecha : lunes 11, de febrero del 2022

FOLIO 02

PAGO DE DERECHO DE SUSTENTACIÓN

SCOTIABANK PERU S.A.A. 11/02/22
386 AGENCIA VENTANILLA 10:43:57

DEPOSITO EN EFECTIVO - CUENTAS CORRIENTES

Nro de Cuenta : 1797050
FAC.CC.NAT.Y MATEMAT
Cod.Cta.Interbancario : 009 100 000001797050 90
Importe Abonado : S/ **************372,00
Valor Total Efectivo : S/ **************372,00
050.001.0024 U20764 . U20764 11/02/22 PLPCR22F

FOLIO 03

DECLARACIÓN JURADA SIMPLE

Yo JUAN LUIS CHECCALLE VENTURO con DNI Nº 71985033 Declaro SER BACHILLER EN MATEMÁTICAS CON FECHA DE OTORGAMIENTO EL 14 DE JUNIO DEL 2019 que los datos y documentos adjuntos son legalmente válidos y corresponden al tenor de la solicitud.

Bellavista, 12 de febrero del 2022

FIRMA

NOMBRE Y APELLIDOS: JUAN LUIS CHECCALLE VENTURO

DNI: 71985033

ADJUNTO:

COPIA DE BACHILLER	

FOLIO 04

REPÚBLICA DEL PERÚ

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

A NOMBRE DE LA NACIÓN

El Rector de la Universidad Nacional del Callao

Por cuanto, el Consejo Universitario:

Con fecha **13** *de* **junio** *del* **2019** *ha conferido el Grado Académico*

de Bachiller en: **MATEMÁTICA**

a Don(ña) **CHECCALLE VENTURO JUAN LUIS**

Por tanto, se expide el presente Diploma para que se reconozca como tal.

Dado y firmado en el Callao el **14** *de* **junio** *del* **2019**

Mg. CÉSAR GUILLERMO JÁUREGUI VILLAFUERTE
SECRETARIO GENERAL

DR. BALDO ANDRÉS OLIVARES CHOQUE
RECTOR

Mg. ROEL MARIO VIDAL GUZMÁN
DECANO

FOLIO 05

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

CODIGO DE LA UNAC: 027

FACULTAD: CIENCIAS NATURALES Y MATEMATICA

ESCUELA PROFESIONAL: MATEMATICA

ABREVIATURA DE GRADO/TITULO: B

EL GRADO O TITULOS SE OBTUVO POR: AUTOMATICO

MODALIDAD DE ESTUDIOS: PRESENCIAL

TIPO DE DIPLOMA: ORIGINAL

FECHA DE RESOLUCION: 14/06/2019

FECHA DE DIPLOMA: 14/06/2019

N° DE REGISTRO: 116-2019

Universidad Nacional del Callao

Ciencia y Tecnología rumbo al Tercer Milenio

El Secretario General de la UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO, que suscribe, CERTIFICA: que esta fotocopia es idéntica a su original que ha tenido a la vista y confrontado minuciosamente.

Se expide la presente a solicitud del interesado y para los fines que considere convenientes.

Lima, 15 AGO 2019

Lic. CÉSAR GUILLERMO JAUREGUI VILLAFUERTE
Secretario General

Resolución C.U.N° 706-19-CU-GB

Libro N° CLXXII

Folio N° 116

INTERESADO

D.N.I. 71985033

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

UNACGB2700010277

0000448

UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CALLAO

FACULTAD DE CIENCIAS NATURALES Y MATEMÁTICA

ESCUELA ACADÉMICO PROFESIONAL DE MATEMÁTICA

“UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER”

TESIS PARA OPTAR EL TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN MATEMÁTICA

Juan Luis Checcalle Venturo

Callao, 2022

PERÚ

Juan Luis Checcalle Venturo

Bachiller

Código: 101256A

DNI: 71985033

Alfredo Sotelo Pejerrey

Asesor

Código: 5438

DNI: 45569296

Hoja de Referencia del Jurado y aprobación

“Una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier”

Jun Luis Checcalle Venturo

Tesis presentada a consideración del cuerpo docente de la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao, como parte de los Requisitos para obtener el título profesional de Licenciado en matemática.

Aprobada por:

………………………………………………..
Presidente

………………………………………………..
Vocal

……………………………………………………
Secretario

………………………………………………………
Suplente

…………………………………………………………
Asesor

Este trabajo de tesis está

dedicado a mi familia, que son mi

motivación a seguir mejorando.

INDICE

TABLAS DE CONTENIDO 3

RESUMEN 4

ABSTRACT 5

INTRODUCCIÓN 6

I. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 7

1.1 Descripción de la realidad problemática. 7
1.2 Formulación del problema. 8
1.3 Objetivos 9
1.3.1 Objetivos generales. 9
1.3.2 Objetivos específicos. 9
1.4 Limitantes de la Investigación 9

II. MARCO TEÓRICO 10

2.1 Antecedentes. 10
2.2 Bases teóricas 12
2.2.1 Espacios normados 12
2.2.2 Espacios de Banach 14
2.2.3 Espacios con producto interno 18
2.2.4 Operadores lineales y acotados 20
2.2.5 Operadores de rango finito-Operadores compactos 22
2.2.6 Operador adjunto 26
2.2.7 Teoría espectral elemental 29
2.2.8 La traza usual 37
2.2.9 Trazas de Dixmier 44
2.2.10 Una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier 50
2.3 Conceptual…….. 56
2.4 Definición de términos básicos 57

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES 60

3.1 Hipótesis. 60
3.2 Definición conceptual de las variables. 60
3.3 Operacionalización de la variable. 61

IV. DISEÑO METODOLÓGICO 62

4.1 Tipo y diseño de la investigación. 62
4.2 Método de investigación. 62

4.3 Población y muestra. 62
4.4 Lugar de estudio y periodo desarrollado 63
4.5 Técnicas e instrumentos para la recolección de información 63
4.6 Análisis y procesamiento de datos. 63

V. RESULTADOS **64**

5.1 Resultados descriptivos 65
5.2 Resultados inferenciales 65
5.3 Otro tipo de resultado estadístico, de acuerdo a la naturaleza del problema 65

VI. DISCUSIÓN DE RESULTADOS **66**

6.1 Contrastación y demostración de la hipótesis con los resultados 66
6.2 Contrastación de los resultados con otros estudios similares 67
6.3 Responsabilidad ética de acuerdo a los reglamentos vigentes 68

VII. CONCLUSIONES **69**

VIII. RECOMENDACIONES **70**

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS **71**

ANEXOS **73**

Matriz de consistencia 73

INDICE DE TABLAS DE CONTENIDO

III.1 Tabla 1: Operacionalización de las variables 61

RESUMEN

“UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER”

Juan Luis Checcalle Venturo

Enero - 2022

Asesor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Titulo obtenido: Licenciado en matemática

Sobre el ideal de operadores nucleares en un espacio de Hilbert podemos definir la traza usual. La traza usual define un funcional lineal positivo unitariamente invariante. Por el teorema de Lidskii, la traza usual de un operador nuclear T es la suma de sus autovalores, donde cada autovalor se repite de acuerdo a su multiplicidad algebraica.

El presente trabajo de tesis demuestra que la traza de Dixmier de un operador depende de sus autovalores y sus multiplicidades; esta fórmula es llamada una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier.

Palabras Claves
Operador compacto, teorema de Lidskii, traza de Dixmier,

ABSTRACT

"A LIDSKII TYPE FORMULA FOR DIXMIER TRACES"

Juan Luis Checcalle Venturo

Enero 2022

Advisor: Dr. Alfredo Sotelo Pejerrey

Degree obtained Licenciate in Mathematics

Over the ideal of nuclear operators on a Hilbert space we can define the usual trace. The usual trace defines a positive, unitarily invariant linear functional. By the Lidskii theorem, the usual trace of a nuclear operator T is the sum of its eingenvalues, where each eigenvalue being repeated according to its algebraic multiplicity.

The present thesis work shows that the Dixmier trace of an operator depends on its eigenvalues and multiplicities; this formula is called a Lidskii type formula for Dixmier traces.

Keywords

Compact operator, Lidskii theorem, Dixmier Trace.

INTRODUCCIÓN

Como en el caso de dimensión finita, la traza de una matriz está definida como la suma de elementos de su diagonal y usando su correspondiente forma de Jordan, la traza de una matriz es igual a la suma de sus autovalores tomando en cuenta sus multiplicidades. En conclusión, la traza de una matriz depende exclusivamente de sus autovalores y multiplicidades.

Ideales de operadores donde se pueda definir un funcional traza merece una gran discusión. Situados en el contexto de espacios de Hilbert de dimensión infinita tenemos al ideal de operadores de rango finito, es decir, operadores lineales y acotados cuya imagen tiene dimensión finita. Es en este ideal donde es posible definir un funcional traza, es decir, un funcional lineal que se anula en su subespacio conmutador. Este funcional es una extensión de la traza matricial y también depende sólo de los autovalores del operador tomado y sus multiplicidades algebraicas.

El ideal de operadores nucleares contiene al ideal de operadores de rango finito. Es posible definir un funcional lineal unitariamente invariante sobre el ideal de operadores de nucleares, llamado la traza usual. La traza usual es una extensión del funcional traza discutido en el párrafo anterior y la fórmula de Lidskii nos dice que este funcional es igual a la suma de los autovalores del operador tomado teniendo en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

La traza de Dixmier definido sobre el ideal de operadores de Lorentz es un ejemplo de traza singular que se obtiene tomando limites generalizados invariantes por dilatación. La traza de Dixmier es un funcional lineal positivo unitariamente invariante. El presente trabajo de tesis está centrado en el estudio de una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier, es decir, una fórmula para la traza de Dixmier que dependa exclusivamente de los autovalores del operador tomado y sus multiplicidades algebraicas.

I. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1. DESCRIPCIÓN DE LA REALIDAD PROBLEMÁTICA

Es conocido que la traza de una matriz cuadrada está definida como la suma de los elementos de su diagonal y es igual a la suma de los autovalores de la matriz tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas. La traza de una matriz cuadrada es un funcional lineal que satisface $Tr(AB) = Tr(BA)$, es decir, se anula en los conmutadores. En el contexto de operadores lineales y acotados en espacios de Hilbert, se busca ideales de operadores y funcionales lineales sobre estos ideales que satisfagan propiedades como el funcional traza de una matriz, referencias sobre este problema pueden encontrarse por ejemplo en Vasudeva H.L. (2017).

La traza usual sobre el ideal de operadores nucleares en espacios de Hilbert es un ejemplo de funcional traza que satisface propiedades como la traza matricial. La fórmula de Lidskii puede encontrarse en Vasudeva H.L (2017) y afirma que la traza usual de un operador nuclear es igual a la suma de sus autovalores teniendo en cuenta sus multiplicidades. Es así que surge el problema de buscar funcionales traza, es decir, funcionales lineales unitariamente invariantes sobre un ideal de operadores cuya expresión depende del operador y sus autovalores, es decir, demostrar una fórmula de tipo Lidskii para su expresión. Algunos estudios sobre este problema pueden verse en Johnson, W.B. and Szankowski, A. (2014) o en Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016).

Otro ejemplo de funcional traza es la traza de Dixmier, su construcción puede encontrarse, por ejemplo, en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012). Como se ha discutido en el párrafo anterior, un problema no trivial es demostrar una fórmula de tipo Lidskii para funcionales traza, es así que surge la problemática de demostrar una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier. Inicialmente la traza de Dixmier de un operador en la parte positiva del ideal

$$M^{1,\infty}(H) = \{A \in L(H) \colon A \; es \; compacto \; y \; sup_{n\geq 1}\left\{\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A)\right\} < \infty\}$$

se define por

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right),$$

donde ω es un límite generalizado en el espacio de sucesiones (con valores reales) acotadas, invariante por dilatación y $(s_k(A))_{n\in\mathbb{N}}$ denota la sucesión de números singulares de A. Este funcional es lineal y se extiende, por linealidad, a todo el ideal $M^{1,\infty}(H)$.

Una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier es dada en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D., 2012, p. 232 y establece que para $A \in M^{1,\infty}(H)$ se cumple la fórmula:

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right), \qquad \ldots.(*)$$

donde $(\lambda_k(A))$ denota la sucesión de valores propios de T, tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas.

El presente trabajo de tesis establece un enfoque diferente al texto Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012) para demostrar la fórmula $(*)$.

1.2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

Lo que se pretende analizar y responder son las siguientes interrogantes:

Problema General:

¿Qué otro enfoque podríamos usar para demostrar $(*)$?

Problemas Específicos

1. ¿De qué manera se construyen trazas de Dixmier?
2. ¿Qué otros funcionales traza admiten una fórmula de tipo Lidskii?

1.3. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1.3.1. Objetivos generales

Usar un enfoque diferente al texto Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012) para demostrar $(*)$.

1.3.2. Objetivos específicos

1. Mostrar que las trazas de Dixmier se construyen usando limites generalizados invariantes por dilatación.
2. Mostrar que funcionales traza de operadores nucleares sobre espacios de Banach con la propiedad de aproximación, admiten una fórmula de tipo Lidskii.

1.4. LIMITANTES DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación la cual es naturalmente teórica más aun abstracta tiene como limitantes teóricas la traza usual sobre operadores nucleares, la traza sobre el ideal de operadores de Ruston Grotendieck y la traza de Dixmier. No presenta limitantes ni espaciales ni temporales.

II. MARCO TEÓRICO

2.1 ANTECEDENTES

Nacional

En la literatura actual, no hay referencias nacionales con una antigüedad no mayor de cinco años.

Internacional

Sukochev, F. and Usachev A. (2016). Dixmier Traces and non-commutative analysis. Elsevier Science, 105, 102-122.

En este artículo se presentan avances recientes en la teoría de trazas de Dixmier y aspectos de sus aplicaciones a análisis y geometría no conmutativa. Se describe la construcción original de la traza de Dixmier. Se estudia una subclase de trazas de Dixmier generadas por límites generalizados invariantes por exponenciación. Finalmente, se aplica las trazas de Dixmier al estudio de propiedades espectrales operadores seudodiferenciales.

Delgado, J., Ruzhansky, M. and Wang, B. (2016). Grothendieck-Lidskii trace formula for mixed-norm and variable Lebesgue space

En este artículo se presenta la fórmula de Lidskii para operadores nucleares definidos en un espacio combinado Lp con peso. Los resultados de este articulo son aplicados para obtener criterios de nuclearidad y formula de trazas para operadores periódicos en el espacio euclidiano n-dimensional,

Delgado, J. and Ruzhansky, M. (2016). Lp nuclearity, traces, and Grothendieck-Lidskii formula on compact Lie groups, *Jornal de Mathematiques Pures et Appliquées, 102* (1), 153-172.

Es en este artículo que se generaliza la clásica formula de Lidskii para operadores r-nucleares definidos sobre grupos de Lie compactos. Se estudia también la distribución de los autovalores.

Pietsch, A. (2019). A new view at Dixmier Traces on $l_{1,\infty}(H)$. Integral Equations and Operator Theory, 91 (3).

La construcción de la traza de Dixmier se obtiene a partir de estados singulares invariantes por dilatación. Sukochev, F. demostró que la propiedad de invariancia por dilatación puede ser suprimida trabajando en el espacio nuclear débil $l_{1,\infty}(H)$**.** Es así que surge una nueva forma de construir trazas de Dixmier. Esto se discute en este artículo y resultados principales sobre trazas de Dixmier son presentados y demostrados desde otro punto de vista.

Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016). The Lidskii trace property and the nest approximation property in Banach Spaces.

En este artículo se extiende la fórmula de Lidskii para espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest. Ejemplos de espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest son dados. Finalmente, espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest son caracterizados con la propiedad de la traza de Lidskii.

Pietsch, A. (2017). A New Approach to Operator Ideals on Hilbert Space and Their Traces. Integral Equations and Operator Theory, 89, 595-606.

En este artículo se presenta a los ideales de operadores vía funciones normadas simétricas. Esto permite abrir un nuevo punto de vista para estudiar trazas en espacios de Hilbert. El resultado más importante en este artículo es la representación de operadores en el ideal de operadores de Lorents como una suma de operadores de rango finito. Además de representación de la traza de Dixmier en función de trazas de operadores de rango finito.

2.2 BASES TEÓRICAS

2.2.1 ESPACIOS NORMADOS

Definición 2.2.1.1: Consideremos un espacio vectorial $(X; +; K; .)$ $donde\ K = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Una norma es una aplicación

$$\| \,.\, \| : X \to \mathbb{R}$$

que satisface:

i. $\|x\| \geq 0\ \ \forall\, x \in X\ \wedge\ \|x\| = 0\ \Leftrightarrow x = 0$;
ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|\quad \forall\, x \in X;\ \alpha \in K = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$;
iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|\quad \forall\, x, y \in X$;

El par $(X;\ \| \,.\, \|)$ es llamado espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.2

Sobre $\mathbb{R}^n$ definimos las normas

- $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
- $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$
- $\|x\|_{max} = max\{|x_i|; i = 1; 2; 3; \ldots; n\}$

Entonces: $(\mathbb{R}^n; \| \,.\, \|_1)$; $(\mathbb{R}^n; \| \,.\, \|_2)$; $(\mathbb{R}^n; \| \,.\, \|_{max})$ son espacios normados.

Ejemplo 2.2.1.3

El espacio de funciones de clase C^1 con valores reales definidas en $[a, b]$ es denotado por

$$C^1[a, b] = \{f : [a; b] \longrightarrow \mathbb{R} :\ f, f' \text{ son continuas } \}$$

$C^1[a, b]$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y si definimos la norma

$$\|f\| = max\{|f(x)|; x \in [a; b]\} + max\{|f'(x)|; x \in [a; b]\},$$

tenemos que $(C^1[a, b];\ \|.\|)$ es un espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.4

El espacio de sucesiones reales acotadas es denotado por

$$\ell^\infty(\mathbb{R}) = \{(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\colon (a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \text{ es acotada }\}.$$

$\ell^\infty(\mathbb{R})$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y si definimos la norma

$$\|(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\|_{sup} = sup\{|a_n|;\ n\ \in\ \mathbb{N}\},$$

tenemos que el par $\left(\ell^\infty(\mathbb{R}); \|\,.\,\|_{sup}\right)$ es un espacio normado. Similarmente, podemos definir el espacio $\ell^\infty(\mathbb{C})$ de sucesiones complejas acotadas.

Ejemplo 2.2.1.5

El espacio de funciones continuas con valores reales definidas en $[a,b]$ es denotado por

$$C[a,b] = \{f\colon [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}/\ f\ es\ continua\ \}$$

$C[a,b]$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, y si definimos las normas

- $\|f\|_{max} = max\{|f(x)|; x\ \epsilon\ [a;b]\},$
- $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx,$

tenemos que $(C[a,b]; \|\,.\,\|_{max}), (C[a,b]; \|\,.\,\|_1)$ son espacios normados.

Ejemplo 2.2.1.6

Para $p \geq 1$, definimos el espacio

$$L^p[a,b] = \left\{f\colon [a,b] \to \mathbb{C}\colon f\ es\ Lebesgue\ medible\ y\ \int_a^b |f(x)|^p dx < \infty\right\}.$$

El espacio $L^p[a,b]$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{C}$. Una norma sobre $L^p[a,b]$ está dada por

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{1/p},$$

luego, el par $\left(L^p[a,b];\ \|.\|_p\right)$ es un espacio normado.

Ejemplo 2.2.1.7

Para $p \geq 1$, definimos el espacio

$$l^p(\mathbb{R}) = \left\{(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}\colon \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty\right\}.$$

El espacio $l^p(\mathbb{R})$ define un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$. Una norma sobre $l^p(\mathbb{R})$ está dada por

$$\|(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{1/p},$$

Luego, el par $(l^p(\mathbb{R});\ \|.\|_p)$ es un espacio normado. Similarmente, podemos definir el espacio $l^p(\mathbb{C})$, donde las sucesiones son complejas.

Definición 2.2.1.8: Sea $(X; \|\,.\,\|\,)$ un espacio normado y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión en X. Decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a un punto $x \in X$ si:

$$\forall\ \varepsilon\ > 0;\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}: \|a_n - x\|\ < \varepsilon;\ \forall\ n \geq n_0.$$

Que la sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ converja al punto x es denotado por

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = x.$$

Observación 2.2.1.9

Usando la definición anterior, es sencillo demostrar la siguiente propiedad: Sea $(X; \|\,.\,\|\,)$ es un espacio normado y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ son sucesiones en X. Si

$$lim_{n\longrightarrow\infty} a_n = x\,, \qquad lim_{n\longrightarrow\infty} b_n = y \quad entonces\ \ lim_{n\longrightarrow\infty} a_n + b_n = x + y.$$

2.2.2 ESPACIOS DE BANACH

Definición 2.2.2.1: Sea $(X; \|\,.\,\|\,)$ un espacio normado y $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión, decimos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy si:

$$\forall\ \varepsilon\ > 0;\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}: \|a_n - a_m\|\ < \varepsilon;\ \forall\ n, m \geq n_0$$

Definición 2.2.2.2: Sea $(X; \|\,.\,\|\,)$ un espacio normado. $(X; \|\,.\,\|\,)$ es llamado espacio de Banach si toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X.

Ejemplo 2.2.2.3

Los espacios

$(l^p(\mathbb{R});\ \|.\|_p), (\ell^\infty(\mathbb{R}); \|\,.\,\|_{sup}), (L^p[a,b];\ \|.\|_p), (C^1[a,b];\ \|.\|), (C[a,b]; \|\,.\,\|_{max}), (C[a,b]; \|\,.\,\|_1)$

son espacios de Banach.

Un lema importante, en el contexto de espacios normados, es el siguiente:

Lema de la combinación lineal

Sea $\{x_1;\ x_2; \dots; x_n\}$ un conjunto linealmente independiente de vectores en un espacio vectorial normado $(E; \|\ .\ \|)$. Entonces:

existe un número $c > 0$ tal que para cualquier colección de escalares $\propto_1;\ \propto_2; \dots;\ \propto_n$ tenemos:

$$\|\propto_1 x_1 + \propto_2 x_2 + \dots + \propto_n x_n\| \geq c(|\propto_1| + |\propto_2| + \cdots |\propto_n|).$$

Demostración:

1er caso: Consideremos $s = |\propto_1| + |\propto_2| + \cdots |\propto_n| = 1$ luego la desigualdad se convierte en

$$\|\propto_1 x_1 + \propto_2 x_2 + \dots + \propto_n x_n\| \geq c$$

Probaremos que para toda colección de escalares $\beta_1; \beta_2; \dots; \beta_n$ tal que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ Se verifica $\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n\| \geq c$ para algún $c > 0$.

Veamos por reducción al absurdo

Negando: $\forall\ c > 0;\ \exists\ \beta_1; \beta_2; \dots; \beta_n$ escalares tal que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ y

$$\|\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n\| < c$$

Haciendo $c = \frac{1}{k}; k \in \mathbb{N}.\ \exists\ \beta_1^k;\ \beta_2^k; \dots;\ \beta_n^k\ escalares$ / $\left\|\beta_1^k x_1 + \beta_2^k x_2 + \cdots + \beta_n^k x_n\right\| < \frac{1}{k}$

Llamando

$y_k = \beta_1^k x_1 + \beta_2^k x_2 + \cdots + \beta_n^k x_n$ se tiene: $\|y_k\| < \frac{1}{k}$ luego $\|y_k\| \to 0\ cuando\ k \to \infty$

Y como $\left|\beta_1^k\right| + \left|\beta_2^k\right| + \cdots + |\beta_n^k| = 1$ entonces $\left\|\beta_j^k\right\| \leq 1;\ \forall\ j = 1,2, \dots, n$

Por tanto la sucesión $\left(\beta_j^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ $\text{es acotada en } \mathbb{R}\ \forall\ j = 1,2, \dots, n$ y por el teorema de Bolzano Weiersstras existe una subsucesión convergente

Es decir: para cada $j = 1,2, \dots, n$ la sucesión $\left(\beta_j^k\right)_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\left(\beta_j^{k_m}\right)_{m \in \mathbb{N}}$ convergente a un escalar que le llamaremos β_j.

Sea $(y_{k_m})_{m\epsilon\mathbb{N}} = (\beta_1^{k_m} x_1 + \beta_2^{k_m} x_2 + \cdots + \beta_n^{k_m} x_n)_{m\epsilon\mathbb{N}}$ subsucesión de $(y_m)_{m\epsilon\mathbb{N}}$

Luego

$y_{k_m} = \beta_1^{k_m} x_1 + \beta_2^{k_m} x_2 + \cdots + \beta_n^{k_m} x_n$ Donde $|\beta_1^{k_m}| + |\beta_2^{k_m}| + \cdots + |\beta_n^{k_m}| = 1$

Además

$$\beta_1^{k_m} \to \beta_1 \; cuando \; m \to \infty$$
$$\beta_2^{k_m} \to \beta_2 \; cuando \; m \to \infty$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad .$$
$$\beta_n^{k_m} \to \beta_n \; cuando \; m \to \infty$$

Entonces:

$$y_{k_m} \to y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \wedge \; |\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$$

Esto es,

No todos los $\beta_1; \beta_2; \ldots; \beta_n$ son ceros simultáneamente y como $\{x_1;\ x_2; \ldots; x_n\}$ es L.I.

Se tiene que $y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \neq 0$

Por otro lado

$y_{k_m} \to y$ Entonces: $\|y_{k_m}\| \to \|y\|$ pero $\|y_k\| \to 0 \; cuando \; k \to \infty$ entonces $y = 0$ ($\Longrightarrow\Longleftarrow$)

2do caso: sea $s = |\propto_1| + |\propto_2| + \cdots |\propto_n|$ tenemos:

- Si s = 0 no hay nada que probar.
- Si: $s \neq 0$ consideremos:

$$\beta_1 = \frac{\alpha_1}{s};\ \beta_2 = \frac{\alpha_2}{s}; \ldots;\ \beta_n = \frac{\alpha_n}{s}$$

Es claro que $|\beta_1| + |\beta_2| + \cdots |\beta_n| = 1$ y por el caso anterior Existe un número $c > 0$ tal que

$$\left\|\frac{\alpha_1}{s} x_1 + \frac{\alpha_2}{s} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_2}{s} x_2\right\| \geq c$$

Luego

$$\|\propto_1 x_1 + \propto_2 x_2 + .. + \propto_n x_n\| \geq c.s = c(|\propto_1| + |\propto_2| + \cdots |\propto_n|).$$

$\blacksquare$

Como aplicación del lema de la combinación lineal tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2.2.2.4: Si $(X, \|.\|)$ es un espacio normado con $dim\, X < \infty$, entonces $(X, \|.\|)$ es un espacio de Banach.

Demostración:

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio con $\dim X = n$, luego consideremos $\{e_1;\ e_2\ ; ... ;\ e_n\}$ una base de X.

Ahora consideremos $(y_k)_{k\,\epsilon\,\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X.

Entonces para cada $k\ \epsilon\ \mathbb{N}$ cada y_k tiene representación única de la forma:

$$y_k = \alpha_1^k e_1 + \alpha_2^k e_2 + \ ...\ + \alpha_n^k e_n$$

Por ser $(y_k)_{k\,\epsilon\,\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy

$$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ n_0\ \epsilon\ \mathbb{N} : \|y_k - y_r\| < \varepsilon, \qquad \forall k; r \geq n_0$$

Entonces:

$$\|y_k - y_r\| = \left\|\left(\alpha_1^k e_1 + \alpha_2^k e_2 + \ ...\ + \alpha_n^k e_n\right) - (\alpha_1^r e_1 + \alpha_2^r e_2 + \ ...\ + \alpha_n^r e_n)\right\| =$$

$$\left\|\left(\alpha_1^k - \alpha_1^r\right)e_1 + \left(\alpha_2^k - \alpha_2^r\right)e_2 + \cdots + (\alpha_n^k - \alpha_n^r)e_n\right\| < \varepsilon.$$

Por el lema de la combinación lineal tenemos que

$$\exists\ c > 0 : \left(\left|\alpha_1^k - \alpha_1^r\right| + \left|\alpha_2^k - \alpha_2^r\right| + \cdots + \left|\alpha_2^k - \alpha_2^r\right|\right)c \leq \|y_k - y_r\| < \varepsilon.$$

Por lo tanto

$$\left|\alpha_j^k - \alpha_j^r\right| < \frac{\varepsilon}{c} \quad \forall\ j = 1; 2; ... ; n,$$

con lo cual $(\alpha_j^k)_{k\,\in\,\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$.

Sea $\propto_1;\ \propto_2; ..;\ \propto_n\ /\ \alpha_j^k \to \propto_j\ \ cuando\ k \to \infty;\ j = 1; 2;\ ...\ ;\ n$

Llamemos $y = \propto_1 e_1 + \propto_2 e_2 + \cdots + \propto_n e_n\ \epsilon\ X$.

Luego se tiene:

$$\|y_k - y\| = \left\| \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k e_j \right) - \left(\sum_{j=1}^{n} \propto_j e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_j^k - \propto_j) e_j \right\|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^k - \propto_j| \|e_j\|$$

$Como\ \alpha_j^k \to \propto_j\ cuando\ k \to \infty;\ \forall j = 1; 2;\ \dots\ ;\ n.$ Entonces $y_k \to y\ cuando\ k \to \infty$.

Por lo tanto queda probado que toda sucesión de Cauchy en X es convergente en X, luego $(X, \|.\|)$ es un espacio de Banach. ■

2.2.3 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

Definición 2.2.3.1: Consideremos un espacio un espacio vectorial $(H; +; K; .)$ Donde K es $\mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Un producto interno es una aplicación:

$$\langle\ .\ ;\ .\ \rangle : HxH \to K$$

tal que satisface:

i. $\langle x; x \rangle \geq 0, \forall x \in H\ \wedge\ \langle x; x \rangle = 0\ \Leftrightarrow x = 0$
ii. $\langle \alpha x + \beta y; z \rangle = \alpha \langle x; z \rangle + \beta \langle y; z \rangle\ \forall x, y, z \in H\ \wedge \alpha, \beta \in K$
iii. $\langle x; y \rangle = \overline{\langle y; x \rangle}\ \forall x\ , y \in H$

El par $(H, \langle .\ ;\ . \rangle)$ es llamado espacio con producto interno o pre-Hilbert.

Observación 2.2.3.2

El producto interno es conjugado lineal en la segunda variable.

Sea $x, y, z \in H\ \wedge \alpha, \beta \in K$ *luego:*

$$\langle x; \alpha y + \beta z \rangle = \overline{\langle \alpha y + \beta z; x \rangle} = \overline{\langle \alpha y; x \rangle} + \overline{\langle \beta z; x \rangle} = \overline{\alpha \langle y; x \rangle} + \overline{\beta \langle z; x \rangle}$$
$$= \bar{\alpha} \overline{\langle y; x \rangle} + \bar{\beta}\ \overline{\langle z; x \rangle} = \bar{\alpha} \langle x; y \rangle + \bar{\beta}\ \langle x; z \rangle$$

Un resultado elemental en todo espacio con producto interno es la desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle x; y \rangle| \leq \langle x; x \rangle^{\frac{1}{2}} \langle y; y \rangle^{\frac{1}{2}} \quad \forall\ x, y \in H,$$

donde la igualdad se cumple cuando x e y son linealmente dependientes.

Observación 2.2.3.3

Si $(H, \langle . \; ; \; . \rangle)$ es un espacio con producto interno, es inmediato demostrar que $\|x\| = \langle x; x\rangle^{1/2}, \; x \in H$ define una norma en H.

Definición 2.2.3.4: Sea $(H, \langle . \; ; \; . \rangle)$ un espacio con producto interno y A un subconjunto de H. El conjunto A es llamado ortonormal si $\langle x; y\rangle = 0, \forall x, y \in A$ con $x \neq y$; y $\langle x; x\rangle = 1, \forall x \in A$.

Definición 2.2.3.5: Un espacio de Hilbert es un espacio con producto interno y completo con la norma definida a partir de su producto interno.

Una desigualdad importante es la llamada desigualdad de Bessel:

Teorema 2.2.3.6 (Desigualdad de Bessel): Sea $(H, \langle . \; ; \; . \rangle)$ un espacio pre-Hilbert, y $\{e_1; e_2; \dots; e_n; \dots\}$ un conjunto ortonormal de H. Entonces todo $x \in H$ verifica

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x; e_n\rangle|^2 \leq \|x\|^2$$

Demostración:

Sea $\propto_i = \langle x; e_i\rangle, \; i \in \mathbb{N}$ luego:

$$0 \leq \langle x - \sum_{i=1}^{n} \propto_i e_i \, ; x - \sum_{i=1}^{n} \propto_i e_i\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \propto_i \langle e_i; x\rangle - \sum_{i=1}^{n} \overline{\propto_i} \langle x; e_i\rangle + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \propto_i . \overline{\propto_j} \langle e_i; e_j\rangle$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\propto_i|^2$$

De donde: $0 \leq \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\propto_i|^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |\propto_i|^2 \leq \|x\|^2$

Tomando límite:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\propto_i|^2 \leq \|x\|^2 \;\Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x; e_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

■

Definición 2.2.3.7: Sea $(H, \langle . \ ; \ . \rangle)$ un espacio de Hilbert y A un subconjunto ortonormal de H. El conjunto A es llamado una base ortonormal de H si: $\langle x, a \rangle = 0, \forall a \in A$, entonces $x = 0$.

Teorema 2.2.3.8: Sea $(H, \langle . \ ; \ . \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\{e_1; e_2; \dots; e_n; \dots\}$ una base ortonormal de H. Entonces todo $x \in H$ puede escribirse de la forma

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k$$

Demostración:

Basta observar que

$$\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k \, , e_m \rangle = 0, \forall m \in \mathbb{N},$$

luego

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x; e_k \rangle e_k$$

■

2.2.4 OPERADORES LINEALES ACOTADOS.

Definición 2.2.4.1: Sea $(X; \| . \|_X)$ y $(Y; \| . \|_Y)$ dos espacios normados y una aplicación $T: X \to Y$ que satisface:

i. $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall \, x; \; y \in X$
ii. $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall \, x \in X \quad \Lambda \quad \alpha \; \in \mathbb{K} = \; \mathbb{R} \, o \, \mathbb{C}$

T, así definido, es llamado un operador lineal.

Definición 2.2.4.2: Sea $(X; \| . \|_X)$ y $(Y; \| . \|_Y)$ dos espacios normados. Un operador lineal $T: X \to Y$ es llamado acotado si existe un $M > 0$ tal que $\|Tx\|_Y \leq M \|x\|_X, \forall \, x \in X$.

Ejemplo 2.2.4.3

Sea $T: (C[a,b]; \|\,.\,\|_{max}) \to \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Usando la linealidad de la integral, es inmediato afirmar que T es un operador lineal. Veamos que T es acotado

Si $f \in C[a,b]$, entonces

$$|T(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

$$\leq \int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b max\{f(x)\ /\ x \in\ [a;b]\}dx = \int_a^b \|f\|_{max}dx$$

$$= \|f\|_{max}\int_a^b 1dx = (b-a)\|f\|_{max},$$

luego $|T(f)| \leq (b-a)\|f\|_{max}$. Por lo tanto, T es un operador acotado.

Ejemplo 2.2.4.4

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$. Es claro que T es un operador lineal. Como

$$\|T((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2,$$

entonces T es un operador acotado.

Ejemplo 2.2.4.5

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$. Es claro que T es un operador lineal. Como

$$\|T((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 \leq \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2,$$

entonces T es un operador acotado.

Sea $(X; \|\,.\,\|_X)$ y $(Y; \|\,.\,\|_Y)$ dos espacios normados y $T: X \to Y$ un operador lineal acotado, luego $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\ \forall\ x \in X, \text{para algun } M > 0$. Para $x \neq 0$ se tiene $\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X} \leq M$ y por lo tanto el conjunto $\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}; x \neq 0\right\}$ es acotado superiormente y así existe su supremo. Este supremo es denotado por $\|T\|$, es decir,

$$\|T\| = sup\left\{\frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}; x \neq 0\right\}.$$

Esto nos induce una norma en el espacio

$$\mathcal{L}(X;Y) = \{T: X \to Y \ / \ T \text{ es un operador lineal acotado}\},$$

Luego, $(\mathcal{L}(X;Y); \|.\|)$ es un espacio normado.

Ejemplo 2.2.4.6

Sea $T: (C[a,b]; \|\ .\ \|_{max}) \to \mathbb{R}$

$$f \longrightarrow T(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Como

$$|T(f)| \leq (b-a)\|f\|_{max}$$

entonces $\|T\| \leq (b-a)$.

Ejemplo 2.2.4.7

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, a_3, \dots)$.

Como

$$\|T((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 = \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2,$$

entonces $\|T\| = 1$.

Ejemplo 2.2.4.8

Sea $T: l^2(\mathbb{R}) \to l^2(\mathbb{R}), T((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (a_2, a_3, a_4, \dots)$.

Como

$$\|T((a_n)_{n\in\mathbb{N}})\|_2 \leq \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_2,$$

entonces $\|T\| \leq 1$.

2.2.5 OPERADORES DE RANGO FINITO – OPERADORES COMPACTOS.

Definición 2.2.5.1: Sean H_1, H_2 dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. El operador T es llamado de rango finito si $\dim(ImT) < \infty$, donde ImT denota la imagen o rango de T.

El espacio de operadores de rango finito de H_1 a H_2 es denotado por

$$F(H_1; H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) \ / \ T \ \ es\ de\ rangofinito\}.$$

Adicionalmente a esto, si $H_1 = H_2$ entonces $F(H_1; H_1)$ se escribirá como $F(H_1)$.

Teorema 2.2.5.2: $F(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

Demostración:

Sea $T_1, T_2 \in F(H_1; H_2) \ \Rightarrow \dim Im(T_1 + T_2) \leq dim\, Im(T_1) + dim\, Im(T_2) \ < \infty$.

Por lo tanto $T_1 + \ T_2 \in F(H_1; H_2)$.

Obviamente que $\propto T_1 \in F(H_1; H_2)$ para todo $\propto$ escalar. ■

Definición 2.2.5.3: Sean $H_1;\ H_2$ dos espacios de Hilbert y $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$. El operador T es llamado compacto si para toda sucesión acotada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_1$ existe una subsucesión de $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_2$ convergente.

El espacio de operadores compactos de H_1 a H_2 es denotado por

$$K(H_1; H_2) = \{T \in \mathcal{L}(H_1; H_2) \ / \ \ T \text{ es compacto}\}$$

Adicionalmente a esto, si $H_1 = H_2$ entonces $K(H_1; H_1)$ se escribirá como $K(H_1)$.

Teorema 2.2.5.4: $K(H_1; H_2)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H_1; H_2)$.

Demostración:

Sea $T_1, T_2 \in K(H_1; H_2)$ y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_1$ una sucesión acotada entonces $\exists (x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada tal que $(Tx_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_2$ convergente

Como T_2 es compacto entonces $\exists (x_{n''})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(Tx_{n''})_{n\in\mathbb{N}} \ \subset \ H_2$ convergente, luego $(T_1 + T_2)(x_{n''})$ es convergente. Por tanto $T_1 + \ T_2 \in K(H_1; H_2)$.

Es obvio que $\propto T_1 \in K(H_1; H_2), \ \forall \propto \in \ K$.

■

Observación 2.2.5.5

$\mathcal{L}(H)$ es un algebra sobre el cuerpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$ con las operaciones de suma puntual y composición.

Teorema 2.2.5.6: $K(H) = K(H; H)$ es un ideal bilátero del álgebra $\mathcal{L}(H)$.

Demostración:

Por el teorema anterior $K(H)$ es un subespacio de $\mathcal{L}(H)$. Veamos ahora que

1) $TR \in K(H), \forall R \in K(H), \forall T \in \mathcal{L}(H)$
2) $RT \in K(H), \forall R \in K(H), \forall T \in \mathcal{L}(H)$.

En efecto:

1) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ sucesión acotada entonces existe una subsucesión $(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada tal que $Rx_{n'} \to r$ como "T" es continua se tiene $TRx_{n'} \to Tr$. Por tanto TR es compacto.
2) Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión acotada, entonces $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada. Luego existe una subsucesion $(x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Tal que $(RTx_{n'})_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente.

■

Teorema 2.2.5.7: Sea X un espacio de Banach. Entonces

$$\dim X < \infty \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{X\ acotada, existe\ una\ subsucesión}\ (x_{n'})_{n\in\mathbb{N}} \subset (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{tal que}\ x_{n'} \to x.$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $dimX = n$. Supongamos que $\{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ es una base para X.

Consideremos: $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset X$ una sucesión acotada, entonces existe $M > 0$ tal que $|x^k| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$

$$x^1 = \propto_1^1 e_1 + \propto_2^1 e_2 + \cdots + \propto_1^1 e_1$$

$$x^2 = \propto_1^2 e_1 + \propto_2^2 e_2 + \cdots + \propto_1^2 e_1$$

……………………………………….

$$x^j = \propto_1^j e_1 + \propto_2^j e_2 + \cdots + \propto_1^j e_1;$$ fijando j ∈ ℕ

Por el Lema de la combinación lineal:

$\exists c_j > 0$ tal que $(|\propto_1| + |\propto_2| + \cdots + |\propto_n|)c_j \leq \|x^j\| < M;$ j ∈ ℕ

$$\Longrightarrow |\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j}}| \leq |\propto_1| + |\propto_2| + \cdots + |\propto_n| \leq \frac{M}{c_j}$$ Para $1 \leq p \leq n$

$\Rightarrow (\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j}})_{j \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}$

$\Rightarrow \exists (\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j_k}})_{k \in \mathbb{N}} \subset (\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j}})_{j \in \mathbb{N}}$ es convergente, luego $\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j_k}} \to \propto_{\boldsymbol{p}}$ $cuando\ k \to \infty$

Definamos: $x = \propto_1 e_1 + \propto_2 e_2 + \cdots + \propto_n e_n \in X$

$x^{j_k} = \propto_1^{j_k} e_1 + \propto_2^{j_k} e_2 + \cdots + \propto_1^{j_k} e_1$ Claramente: $(x^{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \subset (x^j)_{j \in \mathbb{N}}$

Además $\|x^{j_k} - x\| = \left\|\sum_{p=1}^{n} (\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j_k}} - \propto_p) e_p\right\| \leq \sum_{p=1}^{n} |\propto_{\boldsymbol{p}}^{\boldsymbol{j_k}} - \propto_p| . \|e_p\| \to 0\ cuando\ k \to \infty$

$$\Longrightarrow \lim_{k \to \infty} \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{j_k}} = x$$

(⟸) Supongamos que $dimX = \infty$

- Sea $x_1 \in X$ / $\|x_1\| = 1$ y sea $f_1 = \mathcal{L}\{x_1\}$; $\overline{f_1} = f_1$ cerrado en X.
  Por el lema de Riesz, para $\theta = \frac{1}{2}$, $\exists\, x_2 \in X :\ \|x_2 - x_1\| \geq \theta = \frac{1}{2}$ ∧ $\|x_2\| = 1$

  Sea $f_2 = span\{x_1; x_2\}$; $\overline{f_2} = f_2$ cerrado en X.

  Por el lema de Riesz, $\exists\, x_3 \in X$: $\|x_3 - x\| \geq \theta = \frac{1}{2}$, $\forall x \in f_2$ ∧ $\|x_2\| = 1$

En particular: $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2} \wedge \|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$

Siguiendo inductivamente: obtenemos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ en\ \overline{B(0;1)}$ tal que $\|x_m - x_n\| \geq \frac{1}{2}$, de donde se sigue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no tiene subsucesiones convergentes, lo cual contradice la hipótesis.

■

Como consecuencia directa del teorema 2.2.5.7 se tiene:

Corolario 2.2.5.8: Se cumple

a) $F(H_1; H_2) \subset K(H_1; H_2) \subset \mathcal{L}(H_1; H_2)$
b) Si $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ y $dimH_1 < \infty \Longrightarrow T \in K(H_1; H_2)$.

2.2.6 OPERADOR ADJUNTO.

El teorema de representación de Riesz es conocido y puede encontrarse en cualquier referencia de Análisis Funcional. El resultado es el siguiente:

Teorema de Representación de Riesz

Sea H_1 ; H_2 dos espacios de Hilbert y $h: H_1 x H_2 \to K$ una forma sesquilineal acotada, es decir es una función lineal respecto a la primera componente y lineal conjugada respecto a la segunda componente; además existe un $c > 0$ tal que $|h(x;y)| \leq c\|x\|\|y\|, \forall x \in H_1, \forall x \in H_2$. Entonces "$h$" puede escribirse de la forma $h(x;y) = \langle Sx; y\rangle$, donde: $S: H_1 \to H_2$ es un operador lineal acotado. Además S está únicamente determinado por h y $\|S\| = \|h\| = \sup_{\substack{x\neq 0 \\ y\neq 0}} \left\{\frac{|h(x;y)|}{\|x\|\|y\|}\right\}$.

A continuación, mostramos la existencia del operador adjunto:

Teorema 2.2.6.1 (existencia y unicidad del operador adjunto): Sean H_1 ; H_2 dos espacios de Hilbert y consideremos $T: H_1 \to H_2$ un operador lineal acotado. Entonces existe un único operador $T^*: H_2 \to H_1$ lineal y acotado tal que:

$$\langle Tx; y\rangle = \langle x; T^*y\rangle \quad y \quad \|T\| = \|T^*\|$$

Demostración:

Definamos $h: H_2 x H_1 \to K \ / \ h(y;x) = \langle y; Tx\rangle$. Claramente h es una forma sesquilineal acotada.

Además:

$$|h(y;x)| = |\langle y; Tx\rangle| \le \|Tx\|\|y\| \le \|x\|\|T\|\|y\| = \|T\|\|x\|\|y\|$$
$$\Longrightarrow \|h\| \le \|T\|.$$

Por otra parte

$$\|h\| = \sup_{x;y\neq 0}\left\{\frac{|h(y;x)|}{\|x\|\|y\|}\right\} = \sup_{x;y\neq 0}\left\{\frac{|\langle y; Tx\rangle|}{\|x\|\|y\|}\right\} \ge \sup_{x,Tx\neq 0}\left\{\frac{|\langle Tx; Tx\rangle|}{\|x\|\|Tx\|}\right\} = \|T\|.$$

Por lo tanto $\|h\| = \|T\|$.

Luego por el teorema de representación de Riesz existe un único operador $T^*: H_2 \to H_1$ lineal y acotado tal que: $h(y;x) = \langle T^*y; x\rangle \Longrightarrow \langle y; Tx\rangle = \langle T^*y; x\rangle$.

■

Definición 2.2.6.2: Un operador lineal $T: H \to H$ se dice autoadjunto si $T = T^*$,donde H es un espacio de Hilbert.

Definición 2.2.6.3: Consideremos un espacio de Hilbert “H” y un operador lineal acotado:

$$T : H \to H$$

El escalar $\lambda \in K$ es un valor propio de T si existe un vector no nulo $x \in H$, tal que $T(x) = \lambda x$.

Todo vector no nulo que satisfaga la condición anterior se llama vector propio de T, asociado al valor propio λ .

Teorema 2.2.6.4: Los autovalores de un operador autoadjunto $T \in \mathcal{L}(H)$ son números reales y sus autovectores correspondientes a distintos autovalores, son ortogonales.

Demostración:

Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador autoadjunto y sea λ un autovalor de T, correspondiente al autovector v, entonces: $Tv = \lambda v$.

Ahora:

$\lambda\langle v; v\rangle = \langle \lambda v; v\rangle = \langle Tv; v\rangle = \langle v: Tv\rangle = \langle v: \lambda v\rangle = \overline{\langle \lambda v; v\rangle} = \bar{\lambda}.\overline{\langle v; v\rangle} = \bar{\lambda}.\ \langle v; v\rangle,$

de donde:

$$\lambda = \bar{\lambda}.$$

Por otro lado, sean λ, β autovalores diferentes y sus respectivos autovectores $v; w$

Entonces:

$$Tv = \lambda v\ ;\ \ Tw = \beta w.$$

Ahora:

$$\lambda\langle v; w\rangle = \langle \lambda v; w\rangle = \langle Tv; w\rangle = \langle v; Tw\rangle = \langle v; \beta w\rangle = \beta\langle v; w\rangle$$

$$\Rightarrow (\lambda - \beta)\langle v; w\rangle = 0\ \wedge\ \lambda\ \neq\ \beta\ \Rightarrow\ \langle v; w\rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

Teorema 2.2.6.5: Sea T un operador autoadjunto, entonces:

$$\|T\| = sup\{|\langle Tx; x\rangle| /\ \ \|x\| = 1\}.$$

Demostración:

- Por la desigualdad de Cauchy - Schwartz:

$$|\langle Tx; y\rangle| = |\langle y; Tx\rangle| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|y\|\|T\|\|x\| = \|T\|\|x\|\|y\|$$

Para $x\ =\ y,\ \ \|x\| = 1$ se tiene: $|\langle Tx; x\rangle| \leq \|T\|\|x\|\|x\| = \|T\|$

$$\Rightarrow\ \ sup\{|\langle Tx; x\rangle| /\ \ \|x\| = 1\} \leq \|T\|$$

- Por lado: denotemos por $s = sup\{|\langle Tx; x\rangle| /\ \ \|x\| = 1\}$.

Sea $x; y\ \in H$ entonces $\langle T(x + y); x + y\rangle - \langle T(x - y); x - y\rangle = 4Re\langle Tx; y\rangle$

Aplicando desigualdad triangular y la identidad del paralelogramo, obtenemos:

$$4|Re\langle Tx; y\rangle| \leq |T(x + y); x + y| + |T(x - y); x - y|$$

$$\leq s(\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2) = 2s(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

En particular, si tomamos $x \in H\ con\ \|x\| = 1\ y\ Tx \neq 0,\ \ y = \ \|Tx\|^{-1}Tx$
Se obtiene

$$\|Tx\| = Re\langle Tx; \|Tx\|^{-1}Tx\rangle \leq \frac{1}{2}s(1+1) = s.$$

Por lo tanto,

$$\|T\| = sup\{|\langle Tx; x\rangle| /\ \ \|x\| = 1\}. \qquad \blacksquare$$

2.2.7 TEORÍA ESPECTRAL ELEMENTAL

Teorema 2.2.7.1: Sea H un espacio de Hilbert $y\ T \in \mathcal{L}(H)$ compacto y autoadjunto, entonces $\|T\|\ o - \|T\|$ es un autovalor de T.

Demostración:
1er caso: Si $T\ =\ 0$ se tiene que $\lambda = 0$ y por lo tanto el resultado es trivial.

2do caso: Si $T \neq 0$, como T es autoadjunto, por el teorema 2.2.6.5 se tiene

$$\|T\| = sup\{|\langle Tx; x\rangle| /\ \ \|x\| = 1\}.$$

Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \subset H$ tal que $\|x_n\| = 1\ y\ |\langle Tx_n; x_n\rangle| \rightarrow \|T\|$.
Luego $(\langle Tx_n; x_n\rangle)_{n\epsilon\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ es acotada y por el teorema de Bolzano – Weierstrass existe una subsucesión $(x_{n'}) \subset (x_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ tal que $\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle \rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$.
Entonces

$$|\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle| \rightarrow |\lambda| = \|T\|,$$

de donde $\lambda = \|T\|\ \ o\ \ \lambda = -\|T\|$.
Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $\lambda = \|T\|$.

Como

$$0 \leq \|Tx_{n'} - \|T\|x_{n'}\|^2 = \|Tx_{n'}\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle + \|T\|^2$$
$$\leq 2\|T\|^2 - 2\|T\|\langle Tx_{n'}; x_{n'}\rangle \rightarrow 0$$

Entonces

$$Tx_{n'} - \|T\|x_{n'} \to 0.$$

Luego, por compacidad existe una subsucesión $(x_{n''}) \subset (x_{n'})$ tal que $Tx_{n''} \to y \in H$, esto nos dice que $(\|T\|x_{n''}) \to y$. Por lo tanto $x_{n''} \to \frac{y}{\|T\|}$, concluyendo que $Tx_{n''} \to T\left(\frac{y}{\|T\|}\right) = y$. Por tanto, $T(y) = \|T\|y$ de donde $\|T\|$ es autovalor de T.

■

Lema 2.2.7.2: Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ y M un subespacio invariante por T, es decir, $T(M) \subset M$. Entonces $M^{\perp}$ es invariante por T^*.

Demostración:

Sea $y \in M^{\perp}$, entonces para cada $x \in M$ se tiene $\langle x; T^*y\rangle = \langle Tx; y\rangle = 0$ (pues $T(M) \subset M$). Luego:

$$T^*y \in M^{\perp}.$$

■

Teorema 2.2.7.3: (Espectral para operadores compactos autoadjuntos)

Sea $T \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto autoadjunto, entonces existe un sistema ortonormal $\{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$ de autovectores de T con autovalores correspondientes: $\lambda_1; \lambda_2; \dots \lambda_n; \dots$ tal que para cada $x \in H$, se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)\langle x; x_n\rangle x_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . (1)$$

Si la sucesión $(\lambda_n(T))$ es infinita, entonces: $\lambda_n(T) \to 0$ $cuando$ $n \to \infty$.

Demostración:

Por el teorema 2.2.7.1**,** T tiene un autovalor λ_1 $tal\ que$ $|\lambda_1| = \|T\|$. Sea x_1 un autovector asociado a λ_1 tal que $\|x_1\| = 1$.

Sea $H_2 = (span\{x_1\})^{\perp}$. Como $(span\{x_1\})^{\perp}$ es invariante por T, entonces por el lema 2.2.7.2, H_2 es invariante por $T^* = T, (T(H_2) \subset H_2)$.

Ahora consideremos $T_2 = T/H_2$, entonces T_2 es compacto y autoadjunto en H_2, luego por el teorema 2.2.7.1**,** T_2 tiene un autovalor λ_2 con $|\lambda_2| = \|T_2\|$, además $|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T\| = |\lambda_1|$.

Sea x_2 un autovector asociado a λ_2 tal que $\|x_2\| = 1$.

- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ consideramos $x_1 \perp x_2$
- Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ entonces $x_1 \perp x_2$, por teorema 2.2.6.4.

Ahora sea $H_3 = (span\{x_1;\ x_2\})^{\perp}$, entonces por el lema 2.2.7.2 tenemos que $T(H_3) \subset H_3 \subset H_2 \subset H_1 = H$.

Ahora consideremos $T_3 = T/H_3$, entonces T_3 es compacto y autoadjunto en H_2.

Continuando con este proceso, hemos construido una sucesión de autovalores $(\lambda_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de T tal que $|\lambda_{n+1}| \leq |\lambda_n|, \forall\, n \in \mathbb{N}$, y un sistema ortonormal de vectores $\{x_1; x_2; \dots; x_n; \dots\}$.

Como T es compacto, entonces si la sucesión $(\lambda_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ es infinita tenemos que $\lim_{n\to\infty} \lambda_{n+1} = 0$.

Ahora veamos la representación de T:

Caso 1: si $T_{n+1} = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$.

Sea

$$y_n = x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j\rangle x_j \ \Rightarrow y_n \in H_{n+1} = (\mathcal{L}\{x_1; x_2; \dots; x_n\})^{\perp}$$

$$T_{n+1}(y_n) = T(y_n) = 0$$

$$\Rightarrow T\left(x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j\rangle x_j\right) = 0 \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j\rangle T(x_j)$$

$$\Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j\rangle \lambda_j x_j \Rightarrow T(x) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x; x_j\rangle x_j.$$

Caso 2 $T_n \neq 0, \forall\, n \in \mathbb{N}$

Sea:

$$y_n = x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j\rangle x_j \ ; \quad y_n \in (\mathcal{L}\{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\})^{\perp} = H_{n+1}$$

$$\Rightarrow \|T_{n+1}(y_n)\| = \left\| T(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x; x_j\rangle x_j \right\| \leq \|T_{n+1}\| \|y_n\|,$$

Pero:

$$\|y_n\| = \left\| x - \sum_{j=1}^{n} \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq \|x\|,$$

Por tanto:

$$\left\| T(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j \right\| \leq |\lambda_{n+1}| \|x\| \ \to 0 \ cuando \ n \to \ \infty$$

$$\therefore T(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle x; x_j \rangle x_j.$$

■

Teorema 2.2.7.4: (Espectral para operadores compactos)

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \cdots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \cdots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n\geq 1} \subset H_1$; $(y_n)_{n\geq 1} \subset H_2$ tal que para cada $x \in H_1$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle x; x_n \rangle y_n \ \ y \ \ s_n(T) \to 0 \ si \ \left(s_n(T)\right)_{n\in\mathbb{N}} \ es \ infinito.$$

Demostración:

Sea $T \in \mathcal{L}(H_1; H_2)$ un operador compacto, entonces $T^*T \in \mathcal{L}(H_1)$ es compacto y autoadjunto luego por el teorema 2.2.7.3, tenemos un sistema ortonormal $\{x_1; x_2; \ldots\}$ de autovectores de T^*T y

$$T^*Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T^*T) \langle x; x_n \rangle x_n.$$

Por otra parte, como

$$\langle T^*Tx; x \rangle = \langle Tx; Tx \rangle = \|Tx\|^2 > 0$$

Entonces

$$\lambda_n(T^*T) \geq \lambda_{n+1}(T^*T) > 0.$$

Probemos la siguiente afirmación:

Afirmación:

$$Ker(T) = Ker(T^*T)$$

$(\subset)$ Trivial

(⊃) Sea $x \in Ker(T^*T) \Rightarrow T^*Tx = 0 \Rightarrow \langle T^*Tx; x\rangle = 0 \Rightarrow \langle Tx; Tx\rangle = 0$

$$\Rightarrow \|Tx\| = 0 \Rightarrow Tx = 0 \;\Rightarrow x \;\in Ker(T).$$

Consideremos

$$y_n = \frac{Tx_n}{\sqrt{\lambda_n(T^*T)}}.$$

Entonces

$$\langle y_n; y_m\rangle = \frac{\langle Tx_n; Tx_m\rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}} = \frac{\langle T^*Tx_n; x_m\rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}}$$

$$= \frac{\langle \lambda_n(T^*T)x_n; x_m\rangle}{\sqrt{\lambda_n(T^*T).\lambda_m(T^*T)}} = \delta_{mn} = \begin{cases} 1; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases}$$

Como: $H_1 = (Ker\ T) \oplus (Ker\ T)^{\perp}, (Ker\ T)^{\perp} = \overline{ImT}$, entonces por el teorema 2.2.7.3, tenemos que $\{x_1;\ x_2; \ldots\}$ es una base ortonormal para $\overline{ImT}$ y

$$Tx = \sum_{K=1}^{\infty} \lambda_k \langle x; x_n\rangle x_n\,, \qquad \forall\, x \in\ H_1.$$

Luego

$$x \in\ H_1 = (Ker\ T) \oplus \overline{ImT}\ \Rightarrow x = u + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n\rangle x_n$$

$$\Rightarrow Tx = Tu + \sum_{n=1}^{\infty} \langle x; x_n\rangle Tx_n,$$

Pero $Tu = 0$, pues $u \in Ker\ T$.

De donde

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n(T^*T)}\langle x; x_n\rangle y_n.$$

Si escribimos $s_n(T) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)}$ entonces

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n \ldots\ldots\ldots.(2)$$

$\blacksquare$

Es importante notar que:

- $s_n(T)$ es llamado el n – esimo numero singular de T.
- La representación (2) es llamada la representación Hilbert – Schmidt de T.

El siguiente corolario, muestra que el espacio de operadores de rango finito es denso en el espacio de operadores compactos.

Corolario 2.2.7.5: $\overline{F(H)} = K(H)$

Demostración:

Sea $T \in K(H)$ entonces existe una sucesión de números reales no negativos $s_1(T) \geq s_2(T) \geq \cdots \geq s_n(T) \geq s_{n+1}(T) \geq \cdots \geq 0$ y sistemas ortonormales $(x_n)_{n\geq 1} \subset H$; $(y_n)_{n\geq 1} \subset H$ tal que para cada $x \in H$ se tiene:

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n \, , s_n(T) \to 0 \;\; si \left(s_n(T)\right) es\ infinito.$$

Si definimos

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} s_k(T)\langle\, . \; ; x_k\rangle y_k \;\in F(H),$$

entonces $T_n \to T\ cuando\ n \to \infty$, por lo tanto $T \in \overline{F(H)}$

∎

De forma similar al corolario anterior, puede demostrarse el siguiente corolario:

Corolario 2.2.7.6: Sea $Bx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\langle x; x_n\rangle y_n$, donde (x_n), (y_n) son sistemas ortonormales y $(a_n)_{n\geq 1}$ una sucesión decreciente de números no negativos que converge a cero, entonces B es compacto y $a_n = s_n(T)$.

El siguiente corolario, muestra la representación Hilbert-Schmidt del adjunto de un operador:

Corolario 2.2.7.7: Sea $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n$ la representación Hilbert-Schmidt de T. Entonces

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; y_n\rangle x_n.$$

Demostración:

Por linealidad y continuidad, bastaría demostrar que $(\langle\,.\,;x_n\,\rangle y_n)^* = (\langle\,.\,;y_n\,\rangle x_n)^*$.

Sea $R = \langle\,.\,;x_n\rangle y_n \Rightarrow Rx = \langle x;x_n\rangle y_n$. Luego

$$\langle Rx;y\rangle = \langle\langle x;x_n\rangle y_n;y\rangle = \langle x;x_n\rangle\langle y_n;y\rangle = \langle x;\langle y;y_n\rangle x_n\rangle,$$

por lo tanto

$$R^*y = \langle y;y_n\rangle x_n \;\Rightarrow\; R^* = \langle\,.\,;y_n\rangle x_n\,.$$

■

Observación 2.2.7.8

Como

$$T^*x = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x;y_n\rangle x_n,$$

por el corolario 2.2.7.6, tenemos

$$s_n(T) = s_n(T^*)$$

El siguiente teorema, da una caracterización de los números singulares. Su prueba puede encontrarse en Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. ,2003, p. 251.

Teorema 2.2.7.9 (teorema de MIN - MAX):

$$s_n(T) = \min_{dim\,M=n-1}\ \max_{\substack{x\neq 0\\ x\perp M}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Luego: $s_1(T) = \|T\|$

Como consecuencia directa del teorema anterior, tenemos el corolario siguiente**:**

Corolario 2.2.7.10: Sea “A” un operador compacto y “B” un operador acotado

Entonces

$$s_n(AB) \leq \|B\| s_n(A)$$

$$s_n(BA) \leq \|B\| s_n(A)$$

El siguiente corolario puede encontrarse en Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. ,2003, p. 252 y afirma que:

Corolario 2.2.7.11: Si A y B son operadores compactos, entonces:

$$|s_n(A) - s_n(B)| \leq \|A - B\|; \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Observación 2.2.7.12

Por el corolario 2.2.7.11, si $A_n \to A$ entonces $s_k(A_n) \to s_k(A)$, $k = 1,2,3, \ldots$.

DESIGUALDADES DE LOS NUMEROS SINGULARES

Más desigualdades de los números singulares pueden ser encontradas en Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003) y Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000) entre los cuales resaltan:

1. Lema de WEYL.

   Para cada $n \in \mathbb{N}$

- $$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)| \leq \sum_{j=1}^{n} s_j(A)$$

- $$\prod_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)| \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A)$$

Otras desigualdades:

2. Si $p \geq 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j(A)|^p \leq \sum_{j=1}^{n} [s_j(A)]^p.$$

3. Si $p \geq 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} [s_j(A+B)]^p \leq \sum_{j=1}^{n} \left(s_j(A) + s_j(B)\right)^p$$

4. Si $p \geq 1$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \left(s_j(AB)\right)^p \leq \sum_{j=1}^{n} \left(s_j(A)\right)^p \left(s_j(B)\right)^p.$$

5.
$$\prod_{j=1}^{n} s_j(AB) \leq \prod_{j=1}^{n} s_j(A)s_j(B)$$

6. Si $p \geq 1$ se tiene
$$\left(\sum_{j=1}^{n}\left(s_j(A+B)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left(s_j(A)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}\left(s_j(B)\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

2.2.8 LA TRAZA USUAL

Definición 2.2.8.1: Una traza φ sobre un ideal bilatero de operadores J es un funcional lineal positivo unitariamente invariante, esto es $\varphi: J \rightarrow \mathbb{C}$ es un funcional lineal y $\varphi(U^*TU) = \varphi(T);\ \forall\, T \in J, \forall\, U \in \mathcal{L}(H)\ unitario.$

El siguiente teorema muestra que todo funcional lineal sobre un ideal bilatero I es una traza si y solo si se anula en el subespacio conmutador de I.

Teorema 2.2.8.2: Un funcional lineal φ sobre J es una traza si y solo si
$$\varphi(AB) = \varphi(BA);\ \forall\, A \in J, \forall\, B \in \mathcal{L}(H)$$

Demostración:

(⇐) $\varphi\big(U^*(TU)\big) = \varphi\big(U^*(UT)\big) = \varphi((U^*U)T) = \varphi(T)$

(⇐) Es conocido que todo operador lineal y acotado en un espacio de Hilbert puede expresarse como combinación lineal de cuatro operadores positivos, es decir, si $B \in \mathcal{L}(H)$ entonces
$$B = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, U_i;\ \ donde\ U_i \epsilon\ \mathcal{L}(H)\ unitario,\ \ \alpha_i \in \mathbb{C}, i = 1,2,3,4.$$
Primero veamos que: $\varphi(UA) = \varphi(AU);\ \forall\, A \in J, \forall\, U \in \mathcal{L}(H)\ \ unitario.$

En efecto,
$$\varphi(UA) = \varphi(U^*UAU) = \varphi(AU).$$
Como

$$B = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, U_i,$$

entonces

$$\varphi(AB) = \varphi\left(A\sum_{i=1}^{4}\alpha_i U_i\right) = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i \varphi(AU_i) = \sum_{i=1}^{4}\alpha_i \varphi(U_i A) = \varphi\left(\left(\sum_{i=1}^{4}\alpha_i U_i\right)A\right)$$
$$= \varphi(BA).$$

■

Antes de introducir la traza usual, es importante definir el ideal de operadores nucleares

Definición 2.2.8.3: Sea H un espacio de Hilbert separable y $T \in K(H)$. El operador T es llamado nuclear si

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty.$$

El espacio de operador nucleares es denotado por

$$S_1(H) = \left\{A \in \mathcal{L}(H) : \ A \ es \ compacto \ \ y \ \ \sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty\right\}.$$

Usando las desigualdades de los números singulares no es difícil demostrar que $S_1(H)$ es un ideal bilatero del espacio $\mathcal{L}(H)$ de operadores lineales y acotados.

A continuación, definimos una norma en el espacio de operadores nucleares:

Teorema 2.2.8.4:

$$\| \ . \ \|_1 : S_1(H) \to \mathbb{R}_0^+$$
$$A \mapsto \|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \ \text{ es una norma.}$$

Demostración:

1) Como los $s_j(A) \geq 0, \ \forall \ j \in \mathbb{N}$, entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) \geq 0.$$

Además

$$\|A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = 0 \;\Rightarrow s_1(A) = \|A\|_{\mathcal{L}(H)} = 0 \Leftrightarrow A = 0$$

2) Sea $\alpha \in \mathbb{C}, A \in S_1(H)$, entonces

$$\|\alpha A\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(\alpha A) = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_j[(\alpha A)^*(\alpha A)]} = \sum_{j=1}^{\infty} \sqrt{\alpha^2.\lambda_j[A^*A]}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha| \sqrt{\lambda_j[A^*A]} = |\alpha|.\sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) = |\alpha|.\|A\|_1.$$

3) Usando las desigualdades de los números singulares tenemos que

$$\|A+B\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A+B) \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(A) + \sum_{j=1}^{\infty} s_j(B) = \|A\|_1 + \|B\|_1.$$ ■

Teorema 2.2.8.5: $S_1(H)$ es un espacio de Banach con la norma $\| \ . \ \|_1$

Demostración:

Sea $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S_1(H)$ una sucesión de Cauchy, entonces

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, m_0 \in \mathbb{N} \quad m,n \geq m_0 \;\Rightarrow\; \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon.$$

Pero

$$\|A_m - A_n\|_{\mathcal{L}(H)} = s_1(A_m - A_n) \leq \|A_m - A_n\|_1 < \varepsilon.$$

Luego $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{L}(H)$ el cual es completo, entonces existe un operador $A \in \mathcal{L}(H)\ tal\ que\ \|A_m - A\|_{\mathcal{L}(H)} \to 0$ cuando $m \to \infty$, además como A_m es compacto $\forall\, m \in \mathbb{N}$, por el corolario 2.2.7.5, tenemos que A es compacto.

También

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(A_n - A_m) \leq \|A_n - A_m\|_1 < \varepsilon,$$

y haciendo $m \to \infty$, se tiene:

$$\sum_{j=1}^{k} s_j(A_n - A) \leq \varepsilon, \forall\ n > m_0 \ \Rightarrow \ \|A_n - A\|_1 \leq \varepsilon, \forall\ n > m_0.$$

Por lo tanto,

$A_n \to A, cuando\, n \to \infty$ en la norma $\|\ .\ \|_1$

■

A continuación, introducimos la traza usual de un operador nuclear:

Definición 2.2.8.6: Sea $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto y sea $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una base ortonormal de H. La traza usual de A está definida por:

$$Tr(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle A\varphi_n; \varphi_n \rangle$$

El siguiente teorema muestra que la suma de arriba está bien definida:

Teorema 2.2.8.7: Si $T \in S_1(H)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle$$

converge absolutamente para cualquier base ortonormal $(e_k)_{n\in\mathbb{N}}$ de H y su suma es independiente de la elección de la base.

Demostración:

Sea

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\, \langle x_n; y_n \rangle$$

la representación Hilbert-Schmidt de T. Primeramente, veamos que la serie del enunciado converge absolutamente:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \langle Te_k, e_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \langle \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \langle e_k, x_n \rangle y_n, e_k \rangle \right|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle \langle y_n, e_k \rangle|$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_k, x_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\langle y_n, e_k \rangle|^2 \right)^{1/2}$$

$$\leq \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\|x_n\|\|y_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) < \infty.$$

Veamos ahora que la suma no depende de la base ortonormal elegida:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T) \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, x_n\rangle\langle y_n, e_k\rangle,$$

Como

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, x_n\rangle\langle y_n, e_k\rangle = \langle \sum_{k=1}^{\infty}\langle y_n, e_k\rangle e_k, \sum_{k=1}^{\infty}\langle x_n, e_k\rangle\, e_k\rangle = \langle y_n, x_n\rangle,$$

tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\langle Te_k, e_k\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle y_n, x_n\rangle.$$

Por lo tanto, la suma no depende de la base ortonormal elegida.

■

Por otro lado, la traza usual satisface las siguientes propiedades:

1. $Tr(\alpha T + \beta R) = \alpha Tr(T) + \beta Tr(R)$ para $\alpha, \beta \,\epsilon\, \mathbb{C}$ y $T, R \,\epsilon\, S_1(H)$. Esto se sigue directamente de la definición.
2. $Tr(T^*) = \overline{Tr(T)}$ para $T \in S_1(H)$. En efecto, esto se sigue de las siguientes igualdades

$$Tr(T^*) = \sum_{k=1}^{\infty}\langle T^*e_k, e_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\langle e_k, Te_k\rangle = \sum_{k=1}^{\infty}\overline{\langle Te_k, e_k\rangle} = \overline{Tr(T)}\,.$$

3. Como los operadores unitarios llevan bases ortonormales en bases ortonormales, entonces es claro que el funcional traza usual es unitariamente invariante.

Los tres numerales anteriores demuestran el siguiente corolario:

Corolario 2.2.8.8: El funcional Tr es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.

Para establecer ejemplos de operadores nucleares, el teorema de Mercer es un ingrediente importante.

El teorema de Mercer se ubica en el contexto de operadores integrales positivos, su prueba puede ser encontrada en Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M., 2003, p. 197 y afirma que:

Teorema de Mercer

Sea k una función continua en $[a,b]x[a,b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces

$$k(t,s) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)x_k(t)\overline{x_k(s)}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \qquad (3)$$

donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de autovectores de A dadas por (1). Además, la serie de arriba converge absoluta y uniformemente en $[a,b]x[a,b]$.

El teorema de Mercer nos lleva al siguiente corolario.

Corolario 2.2.8.9: Sea k una función continua en $[a,b]x[a,b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces A es nuclear y

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)$$

Demostración:

Tomando $t = s$ en (3) tenemos que

$$k(t,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)|x_k(t)|^2,$$

e integrando esta última expresión llegamos a

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A)\,\|x_k\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

Como para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que $\langle Af, f\rangle \geq 0$, entonces A es un operador positivo, luego $\lambda_k(A) = s_k(A)$. Por lo tanto,

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k(A)$$

lo que nos dice que A es nuclear.

■

El teorema de Lidskii expresa la traza usual de un operador nuclear como la suma de sus autovalores tomando en cuenta sus multiplicidades algebraicas; su prueba puede encontrarse en diferentes referencias como por ejemplo Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N., 2000, p. 63. El enunciado es el siguiente:

Teorema de Lidskii

Si $T \in S_1(H)$, entonces

$$Tr(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(T),$$

donde, $\left(\lambda_k(T)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de valores propios de T, tomado en cuenta sus multiplicidades, y ordenados de tal forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

Observación 2.2.8.10

Por el teorema de Lidskii y el lema de Weyl, la traza usual es continua (acotada) con la norma $\| \ . \ \|_1$, mas precisamente se cumple

$$|Tr(T)| \leq \| T \|_1, \forall T \in S_1(H).$$

Ejemplo 2.2.8.11

Por el corolario 2.2.8.9, si k una función continua en $[a,b]x[a,b]$ y para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces A es nuclear y por el teorema de Lidskii concluimos que

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = Tr(A).$$

La expresión anterior es llamada la fórmula de la traza y expresa la traza usual del operador A en función de su núcleo k, es decir, no depende de los autovalores de A.

2.2.9 TRAZAS DE DIXMIER

Definición 2.2.9.1: Una traza φ sobre un ideal bilatero de operadores J es llamada singular si $\varphi(F) = 0, \forall F \in F(H)$.

La traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular. Para su construcción es necesario garantizar la existencia de limites generalizados o estados singulares con ciertas propiedades de invariancia. A continuación, presentamos la construcción de la traza de Dixmier.

Durante esta sección, ℓ^{∞} denotará el espacio de sucesiones complejas acotadas y C_0 el subespacio de sucesiones convergentes a cero.

Por Carey A. and Sukochev F. (2006) existe un estado ω en ℓ^{∞}(un funcional lineal positivo en ℓ^{∞} tal que $\omega(1,1,1,1,\dots)$= 1) tal que para cada $n \geq 1$ se tiene

$$\omega o D_n = \omega o T = \omega o H = \omega,$$

donde

$T: \quad \ell^{\infty} \longrightarrow \ell^{\infty}$, $T(x_1, x_{2,} x_3, \dots)$ = $(x_2, x_3, \dots)$

$H: \quad \ell^{\infty} \longrightarrow \ell^{\infty}$, $H(x_1, x_{2,} x_3, \dots)$ = $(x_1, \frac{x_{1+}x_2}{2}, \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \dots)$

$D_n: \ell^{\infty} \longrightarrow \ell^{\infty}$, $D_n(x_1, x_{2,} x_3, \dots)$=$(\underbrace{x_1, x_1, \dots . x_1,}_{n-veces} \underbrace{x_2, x_2, \dots . x_2,}_{n-veces} \dots ..)$

Observación 2.2.9.2

Si un estado ω en ℓ^{∞} es invariante por T, entonces $\omega(a)$= 0 para todo $a \in CN$, donde CN denota el espacio de sucesiones con una cantidad finita de términos no nulos. Además, como CN es denso en C_0, por continuidad tenemos que $\omega(a)$= 0 para todo $a \in C_0$. De esta forma, hemos conseguido estados que se anulan en C_0. Estados con esta propiedad, son llamados estados singulares.

Por la observación anterior, hemos conseguido estados singulares invariantes por el operador D_2, veamos la construcción de la traza de Dixmier.

Consideremos el siguiente espacio:

$$M_{1,\infty}(H) = \left\{A \epsilon\ K(H) / \quad \|A\|_{1,\infty} = \sup_{n \geq 1} \left\{\frac{1}{\log(n+1)} \sum_{k=1}^{n} s_k(A)\right\} < \infty\right\}$$

Usando las propiedades de los números singulares se prueba que $M_{1,\infty}(H)$ es un ideal bilátero del algebra $\mathcal{L}(H)$.

Sea ω un estado singular en ℓ^{∞} invariante por el operador D_2 (su existencia está garantizada en la observación 2.2.9.2), sobre $M^{+}{}_{1,\infty}(H) = \{A \in M_{1,\infty}(H), A\ es\ positivo\}$ definimos el funcional Tr_{ω} por

$$Tr_{\omega}(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Como $s_k(U^*AU) = s_k(A)$ para todo $U \in \mathcal{L}(H)$ unitario, entonces Tr_{ω} es unitariamente invariante, solo faltaría probar la linealidad. Veamos esto:

Sean

$$T_1, T_2\ \epsilon M^{+}{}_{1,\infty}(H),\quad \alpha_n = \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(T_1),\quad \beta_n = \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(T_2),$$

$$\gamma_n = \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(T_1 + T_2).$$

Siguiendo las propiedades de los números singulares se tiene que

$$\gamma_n \leq \alpha_n + \beta_{n,}$$

lo cual implica que

$$Tr_{\omega}(T_1 + T_2) \leq Tr_{\omega}(T_1) + Tr_{\omega}(T_2).$$

Para operadores positivos se tiene que

$$\sum_{k=1}^{n} s_k(T_1) + \sum_{k=1}^{n} s_k(T_2) \leq \sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2).$$

La desigualdad anterior implica que

$$\alpha_n + \beta_n \leq \frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)}\gamma_{2n},$$

y como

$$\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)}\gamma_{2n} - \gamma_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\ \epsilon\ C_0,$$

entonces

$$\omega((\gamma_{2n})_{n\in\mathbb{N}}) = \omega\left(\left(\frac{\log(2n+1)}{\log(n+1)}\gamma_{2n}\right)_{n\in\mathbb{N}}\right).$$

Veamos ahora que

$$\omega((\gamma_{2n})_{n\in\mathbb{N}}) = \omega((\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

En efecto, como ω es invariante por D_2, la igualdad anterior es equivalente a que

$$\omega(\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) = \omega((\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}).$$

Como ω es un estado singular, basta verificar que

$$(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} - (\gamma_2, \gamma_2, \gamma_4, \gamma_4, \dots) \in C_0.$$

Restando lo anterior tenemos

$$(\gamma_1 - \gamma_2, 0, \gamma_3 - \gamma_4, 0, \gamma_5 - \gamma_6, 0, \dots),$$

luego veamos que esta última sucesión converge a cero.

Para esto, basta verificar que

$$(\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n})_{n\in\mathbb{N}} \in C_0.$$

$$\gamma_{2n-1} - \gamma_{2n} = \frac{1}{\log(2n)}\sum_{k=1}^{2n-1} s_k(T_1 + T_2) - \frac{1}{\log(2n+1)}\sum_{k=1}^{2n} s_k(T_1 + T_2)$$

$$= \frac{\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\log(2n+1)}\gamma_{2n-1} - \frac{s_{2n}(T_1+T_2)}{\log(2n+1)} \to 0.$$

Tomamos ω y concluimos que

$$Tr_\omega(T_1) + Tr_\omega(T_2) \leq Tr_\omega(T_1 + T_2),$$

Concluimos entonces que Tr_ω es una traza sobre el ideal ${M^+}_{1,\infty}(H)$.

Definición 2.2.9.3: La traza de Dixmier de un operador autoadjunto $A \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(A) \coloneqq Tr_\omega(A_+) - Tr_\omega(A_-)$$

donde $A_+ = \frac{1}{2}(A + |A|)$ y $A_- = -\frac{1}{2}(A - |A|)$ son operadores positivos llamados la parte positiva y negativa de A respectivamente, donde $|A|$ denota la raíz cuadrada de operador A^*A.

La traza de Dixmier de un operador arbitrario $A \in M_{1,\infty}(H)$ está definida por

$$Tr_\omega(A) := \ Tr_\omega(Re(A)) + i\, Tr_\omega(Im(A))$$

donde $Re(A) = \frac{1}{2}(A\ + A^*)$ y $Im(A) = \frac{-i}{2}(A - A^*)$ son operadores autoadjuntos llamados la parte real e imaginaria de A respectivamente.

El siguiente teorema demuestra que la traza de Dixmier, en efecto, es una traza singular continua sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.

Teorema 2.2.9.4

1) Tr_ω es una traza sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.
2) $Tr_\omega(A) = 0$, $\forall A \in S_1(H)$.
3) Tr_ω es una funcional lineal continuo con la norma $\|.\|_{1,\infty}$, más precisamente,

$$|\ Tr_\omega(A)| \leq \|A\|_{1,\infty}\ \forall A\ \epsilon M_{1,\infty}(H).$$

Demostración:

1) Todo $A\ \in M_{1,\infty}(H)$ puede escribirse como $A = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4$, donde A_1=$(Re(A))_+$, T_2=$(Re(A))_-$, T_3=$(Im(A))_+$, T_4=$(Im(A))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. como Tr_ω es aditivo en $M_{1,\infty}(H)$, entonces Tr_ω se extiende por linealidad a un funcional lineal en todo $M_{1,\infty}(H)$. Que el funcional lineal Tr_ω sea unitariamente invariante se sigue del hecho que $s_n(U^*AU)$= $s_n(A)$ para todo $n \,\epsilon\, \mathbb{N}$ y $U\ \epsilon\ \mathcal{L}(H)$ operador unitario.

2) Como $A = A_1 - A_2 + iA_3 - iA_4$, donde A_1=$(Re(A))_+$, A_2=$(Re(A))_-$, A_3=$(Im(A))_+$, A_4=$(Im(A))_-$ son operadores positivos en $M_{1,\infty}(H)$. Basta verificar que si $A\ \epsilon\ S_1(H)$ es un operador positivo entonces $Tr_\omega(A) = 0$.
En efecto, como $A\ \epsilon\ S_1(H)$ entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} s_n(A) < \infty,$$

luego

$$\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A) \leq \frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{\infty} s_k(A).$$

Tomando limite a la anterior desigualdad, concluimos que

$$\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A) \longrightarrow 0$$

y como ω es un estado singular, entonces $Tr_\omega(A) = 0$.

3) Puede verificarse que el estado ω es acotado y $\|w\| = 1$, por lo tanto

$$|\, Tr_\omega(A)| \leq \|A\|_{1,\infty}\ ,\ \forall A \in M_{1,\infty}(H).$$

El cual permite establecer la desigualdad pedida para todo A en $M_{1,\infty}(H)$.

■

Observación 2.2.9.5

Por el teorema anterior, tenemos que, en particular, Tr_ω se anula en el ideal de operadores de rango finito. Por lo tanto, la traza de Dixmier es un ejemplo de traza singular.

Alain Connes sugiere otra forma de construir estados invariantes por el operador dilatación D_2. Veamos esto:

Sea el operador

$$M: \ell^\infty \to \ell^\infty, M((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{k}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Consideremos φ un estado singular en ℓ^∞, por A. Pietsch (2013) tenemos que

$$MD_2x - Mx \in C_0, \forall x \in \ell^\infty,$$

luego, por continuidad de φ tenemos que

$$\varphi M D_2 = \varphi M.$$

Tomando $\omega = \varphi M$ se tiene

$$\omega D_2 = \omega,$$

luego ω es invariante por el operador dilatación D_2.

La traza de Dixmier asociada a este estado es llamada traza de Connes-Dixmier. Por lo tanto, toda traza de Connes-Dixmier es traza de Dixmier, pero el reciproco no siempre es cierto. Por lo tanto, si denotamos por $\mathcal{D}$ el conjunto de trazas de Dixmier y por $\mathcal{C}$ el conjunto de trazas de Connes-Dixmier, entonces $\mathcal{C} \subset \mathcal{D}$.

El presente trabajo de tesis tiene como objetivo general estudiar una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier, es decir, una fórmula para la traza de Dixmier que dependa exclusivamente de los autovalores del operador tomado y sus multiplicidades algebraicas. La siguiente sección, contiene una demostración de esto.

2.2.10 UNA FÓRMULA DE TIPO LIDSKII PARA TRAZAS DE DIXMIER

A continuación, presentamos algunos resultados preliminares para demostrar una fórmula de tipo Lidskii para trazas de Dixmier.

Lema 2.2.10.1: Sea A un operador compacto autoadjunto. Entonces para cada $n \geq 1$ se cumple

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - s_k(A_+) + s_k(A_-)\right| \leq 2ns_n(A),$$

donde, $\left(\lambda_n(T)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de valores propios de T ordenados de tal forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

Demostración:

Como

$$\left(\lambda_k(A)\right)_{k=1}^{n} \subset \left(s_k(A_+)\right)_{k=1}^{n} \cup \left(-s_k(A_-)\right)_{k=1}^{n},$$

entonces el conjunto

$$\left(s_k(A_+)\right)_{k=1}^{n} \cup \left(-s_k(A_-)\right)_{k=1}^{n} \setminus \left(\lambda_k(A)\right)_{k=1}^{n} \subset \{\lambda : |\lambda| \leq |\lambda_n(A)|\}$$

es de cardinalidad menor que $2n$. Como A es autoadjunto, entonces $|\lambda_n(A)| = s_n(A)$. Por lo tanto,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - s_k(A_+) + s_k(A_-)\right| \leq 2n|\lambda_n(A)| = 2ns_n(A).$$ ■

Para operadores normales, se cumple la siguiente desigualdad dada en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D., 2012, p. 160.

Lema 2.2.10.2: Sea A un operador compacto normal. Entonces para cada $n \geq 1$ se cumple

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - \lambda_k\big(Re(A)\big) - i\lambda_k(Im(A))\right| \leq 5ns_n(A),$$

El teorema de Ringrose puede ser encontrado en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D., 2012, p. 22 y descompone un operador compacto como una suma de un operador Volterra (operador compacto con espectro formado sólo el cero) y un operador compacto normal. El resultado es el siguiente:

Teorema 2.2.10.3: Sea $A \in K(H)$. Entonces existe un operador Volterra Q y un operador compacto normal N tal que $A = N + Q$ y $(\lambda_n(N))_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$.

Observación 2.2.10.4

La descomposición del operador A dada en el teorema 2.2.10.3 será llamada la descomposición de Ringrose del operador A.

Los últimos resultados que necesitaremos se ubican en el contexto del subespacio conmutador. Empecemos definiendo este subespacio:

Sea J un ideal bilatero de operadores en $\mathcal{L}(H)$. El subespacio

$$Com(J) = span\{AB - BA, A \in J, B \in \mathcal{L}(H)\}$$

es llamado el subespacio conmutador de J.

El subespacio conmutador y la teoría de trazas se relacionan a partir del siguiente teorema:

Teorema 2.2.10.5: Un funcional lineal φ sobre J es una traza si y solo si $\varphi(C) = 0, \forall C \in Com(J)$.

Demostración:

Basta usar la definición de $Com(J)$ y el teorema 2.2.8.2.

■

A continuación, introducimos el espacio:

$$\mathcal{L}_{1,\infty}(H) = \{A \in K(H):\ sup_{n\geq 1}\{ns_n(A)\} < \infty\}.$$

Observación 2.2.10.6

Usando desigualdades de los números singulares tenemos que $\mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ es un ideal bilatero de operadores del algebra $\mathcal{L}(H)$. Además $\mathcal{L}_{1,\infty}(H) \subset M_{1,\infty}(H)$.

El ultimo teorema que necesitamos puede encontrarse en Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D., 2012 p. 189 y es el siguiente:

Teorema 2.2.10.7: Sea $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ y $A = N + Q$ es la descomposición de Ringrose de A. Entonces $N \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ y $Q \in Com(\mathcal{L}_{1,\infty}(H))$.

Terminamos esta sección demostrando un teorema de tipo Lidskii para trazas de Dixmier. Nuestro resultado principal es el siguiente:

Teorema 2.2.10.8: Sea ω un espacio singular en ℓ^∞ invariante por el operador D_2. Si $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H) \subset M_{1,\infty}(H)$, entonces

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)\right),$$

donde $\left(\lambda_n(A)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de autovalores de A tomando en cuenta sus multiplicidades.

Demostración:

Si $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ es autoadjunto, entonces por definición

$$Tr_\omega(A) := Tr_\omega(A_+) - Tr_\omega(A_-) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A_+) - s_k(A_-)\right)\right).$$

Se sigue del lema 2.2.10.1 que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - s_k(A_+) + s_k(A_-)\right| \leq 2ns_n(A) \ldots\ldots\ldots (4)$$

Como la sucesión $(ns_n(A))$ es acotada, dividiendo a la desigualdad (4) por $\log(n+1)$, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A) - s_k(A_+) + s_k(A_-)\right) = 0.$$

Finalmente, como ω es un estado singular, entonces

$$\omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)\right) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(A_+) - s_k(A_-)\right)\right).$$

Por lo tanto,

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)\right).$$

Ahora supongamos que $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ es normal, entonces por definición

$$\begin{aligned} Tr_\omega(A) &:= Tr_\omega\big(Re(A)\big) + \mathrm{i}\, Tr_\omega(Im(A)) \\ &= \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} s_k(Re(A)) + i s_k(Im(A))\right)\right). \end{aligned}$$

Por lo hecho para el caso autoadjunto, tenemos que

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\big(Re(A)\big) + i\lambda_k\big(Im(A)\big)\right)\right)\ldots\ldots\ldots(5)$$

Luego, por el lema 2.2.10.2 se tiene que

$$\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A) - \lambda_k\big(Re(A)\big) - i\lambda_k(Im(A))\right| \leq 5ns_n(A), \ldots\ldots(6)$$

Como la sucesión $(ns_n(A)\ )$ es acotada, dividiendo a la desigualdad (6) por $\log(n+1)$, llegamos a que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A) - \lambda_k\big(Re(A)\big) - i\lambda_k(Im(A))\right) = 0.$$

Como ω es un estado singular, entonces

$$\omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)\right) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(Re(A)) + i\lambda_k(Im(A))\right)\right).$$

Finalmente, reemplazamos en (5) y llegamos a que

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)\right).$$

En general, si tomamos un operador arbitrario $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$, por el teorema 2.2.10.7 se tiene que A puede escribirse como $A = N + Q$, $N \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H)$ y $Q \in Com(\mathcal{L}_{1,\infty}(H))$. Luego

$$Tr_\omega(A) = Tr_\omega(N) + Tr_\omega(Q).$$

Como $Q \in Com(\mathcal{L}_{1,\infty}(H))$, entonces $Tr_\omega(Q) = 0$. Y por el caso anterior concluimos que

$$Tr_\omega(A) = Tr_\omega(N) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(N)\right)\right)$$

$$= \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)\right).$$

$\blacksquare$

2.3 CONCEPTUAL

Según Vasudeva H.L. (2017) la teoría espectral es un término inclusivo para las teorías que extienden la teoría de vectores y valores propios de una matriz cuadrada a la más amplia teoría de la estructura de operadores en ciertos espacios matemáticos. Es resultado de los estudios del álgebra lineal y de las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales y sus generalizaciones.

Ubicados en el contexto de trazas singulares, una traza singular (Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012)) es una traza en un cierto ideal de operadores compactos de un espacio de Hilbert separable que se anula en el ideal de operadores de rango finito, por ejemplo la traza de Dixmier . El espacio de los operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert de dimensión finita tiene sólo el cero funcional como traza singular ya que todos los operadores tienen rango finito. Por ejemplo, las álgebras matriciales no tienen traza singular no trivial.
El matemático estadounidense Gary Weiss y, más tarde, el matemático británico Nigel Kalton observaron en el caso de dimensión infinita que existen trazas singulares no triviales en el ideal de operadores nucleares.

El estudio del subespacio conmutador nace debido a que una traza se anula en este subespacio. Por ello podemos mencionar lo siguiente:
El subespacio conmutador de un ideal bilatero de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert es el subespacio lineal generado por conmutadores de operadores en el ideal de operadores acotados. La caracterización moderna del subespacio conmutador es a través de la Correspondencia de Calkin e implica la invariancia del espacio de sucesiones de Calkin de un ideal de operadores. Esta caracterización espectral explícita reduce los problemas y preguntas sobre conmutadores y huellas en ideales bilateros a problemas y condiciones (más resolubles) en espacios de sucesiones.

Los conmutadores de operadores lineales en espacios de Hilbert cobraron prominencia en la década de 1930 cuando aparecieron en el mecánica matricial, o Heisenberg, formulación de la mecánica cuántica. Sin embargo, los subespacios de conmutadores recibieron escasa atención hasta la década de 1970. Matemático estadounidense Paul Halmos en 1954 mostró que cada operador acotado en un espacio de Hilbert de dimensión infinita separable es la suma de dos conmutadores de operadores acotados. En 1971, Carl Pearcy y David Topping revisaron el tema y estudiaron los subespacios de conmutadores para Ideales de Schatten. Como estudiante, el matemático estadounidense Gary Weiss comenzó a investigar las condiciones espectrales para conmutadores de Operadores de Hilbert – Schmidt. Matemático británico Nigel Kalton, notando la condición espectral de Weiss, caracterizó a todos los conmutadores de clase de rastreo. El resultado de Kalton forma la base para la caracterización moderna del subespacio del conmutador. En 2004, Ken Dykema, Tadeusz Figiel, Gary Weiss y Mariusz Wodzicki publicaron la caracterización espectral de los operadores normales en el subespacio del conmutador para cada ideal bilateral de operadores compactos.

2.4 DEFINICION DE TERMINOS BÁSICOS

Espacios de Banach (Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003))

Consideremos un espacio un espacio vectorial $(X;+;K;.)$ donde K es $\mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Una norma es una aplicación:

$$\|.\|: X \to \mathbb{R}_0^+$$

tal que

- $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
- $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \forall x \in X, \forall \alpha \in K$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in X$

El par $(X, \|.\|)$ es llamado un espacio normado. Si en el espacio normado $(X, \|.\|)$ toda sucesión de cauchy converge en X, entonces $(X, \| \quad \|)$ es llamado un espacio normado completo o simplemente un espacio de Banch.

Espacios de Hilbert (Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003))

Consideremos un espacio un espacio vectorial $(H; +; K; .)$ donde K es $\mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$. Un producto interno es una aplicación:

$$\langle\ .\ ;\ .\ \rangle: HxH \rightarrow K$$

tal que se cumple:

- Definida positiva $\langle x; x\rangle \geq 0\ \forall x \in E\ \wedge\ \langle x; x\rangle = 0\ \Leftrightarrow X = 0$
- Lineal en la primera variable: $\langle \alpha x + \beta y; z\rangle = \alpha\langle x; z\rangle + \beta\langle y; z\rangle\ \forall x, y, z \in E\ \wedge \alpha, \beta \epsilon K$
- Es hermítica $\langle x; y\rangle = \overline{\langle y; x\rangle}\ \forall x\ , y \in E$

El par $(H, \langle .,. \rangle)$ donde $\langle .,. \rangle$ es un producto interno en H es llamado espacio prehilbert y si la norma $\|x\| = \sqrt{\langle x; x\rangle}$ es completa, entonces el par $(H, \langle .,. \rangle)$ es llamado un espacio de Hilbert.

Operadores lineales y acotados en Espacios de Hilbert (Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003))

Sea $(X; \|\ .\ \|_X)\ y\ (Y; \|\ .\ \|_Y)$ dos espacios normados y una aplicación $T: X \rightarrow Y$ que satisface:

- $T(x + y) = T(x) + T(y) \quad \forall\ x;\ y \in X$
- $T(\alpha x) = \alpha T(x) \quad \forall\ x \in X \quad \Lambda \quad \alpha\ \in \mathbb{K} =\ \mathbb{R}\ o\ \mathbb{C}$

"T" así definido se llama operador lineal.

Sea $(X; \|\ .\ \|_X)\ y\ (Y; \|\ .\ \|_Y)$ dos espacios normados y $T: X \rightarrow Y$ un operador lineal tal que $\|Tx\|_Y \leq M\|x\|_X\ \forall\ x \in X, para\ algun\ M > 0$, "T" es llamado operador lineal acotado. Además, Si $X = Y$ el espacio $L(X)$ representará el espacio de operadores lineales y acotados en X.

Operadores de Rango finito (Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003))

Sea H un espacio de Hilbert y F un operador lineal y acotado en H. El operador F es de rango finito si la dimensión de su imagen es finita, es decir, si $dim\ (Im(T)) < \infty$.

Operadores Compactos (Vasudeva, H.L. (2017))

Sea H un espacio de Hilbert y $T \in L(H)$, T es llamado compacto si para toda sucesión acotada $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en H, $(T(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesion convergente en H. El espacio de operadores compactos en H es denotado por $K(H)$ y define un ideal del algebra de operadores lineales y acotados $L(H)$.

Sucesión de números singulares (Vasudeva, H.L. (2017))

La sucesión de números singulares de un operador compacto T definido sobre un espacio de Hilbert H, es una sucesión de decreciente de números no negativos $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$, donde $s_n(T) = (T^*T)^{1/2}$.

Funcional Traza (Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012))

Una traza τ sobre un ideal de operadores J es un funcional lineal tal que $\tau(AT) = \tau(TA), \forall T \in J, \forall A \in L(H)$.

Traza Singular (Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012))

Una traza τ sobre un ideal de operadores J es llamada singular si $\tau(\mathrm{F}) = 0, \forall \mathrm{F}$ operador de rango finito, es decir, para todo operador cuya dimensión de su imagen es finita.

III. HIPÓTESIS Y VARIABLES

3.1. HIPÓTESIS

3.3.1. HIPÓTESIS GENERAL

Propiedades de los números singulares y el teorema de Ringrose permiten usar un enfoque diferente para demostrar $(*)$.

3.3.2. HIPÓTESIS ESPECÍFICA

1. Usando el teorema de Hahn Banach podemos garantizar la existencia de limites generalizados invariantes por dilatación que permitirán construir trazas de Dixmier.

2. Usando el álgebra de Ruston Grothendieck de operadores nucleares sobre espacios de Banach con la propiedad de aproximación, permitirá deducir funcionales traza y su fórmula de tipo Lidskii.

3.2. DEFINICIÓN CONCEPTUAL DE LAS VARIABLES

Variable dependiente

Fórmula de tipo Lidskii para funcionales traza: fórmula que expresa la traza de un operador en función de sus autovalores y multiplicidades.

Variable independiente

Trazas de Dixmier: Funcional lineal unitariamente invariante positivo definido con un estado singular invariante por dilatación.

3.3. OPERACIONALIZACIÓN DE LAS VARIABLES

Variable	Dimensiones	Indicadores	Índices	Método	Técnica
Dependiente Fórmula de tipo Lidskii para funcionales traza	- Los funcionales trazas admiten una fórmula de tipo Lidskii. - Los funcionales trazas no admiten una fórmula de tipo Lidskii.	- Los funcionales traza dependen de los autovalores y multiplicidades del operador tomado. - Los funcionales traza no dependen de los autovalores y multiplicidades del operador tomado.	- $\tau(A) = f\big(\lambda(A)\big)$ donde τ es una traza y f es una funcion con valores complejos definda en el espectro de A. - $\tau(A) \neq f(\lambda(A))$ donde τ es una traza y f es una funcion con valores complejos definda en el espectro de A.	Deductivo	Analítica
Trazas de Dixmier	- Cero - Diferente de cero	- La sucesión $\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(T)\right)$ converge a cero - La sucesión $\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(T)\right)$ no converge a cero	- $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(T) = 0$ - $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(T) \neq 0$	Deductivo	Analítica

TABLA III.1: Tabla 1: Operacionalizacion de las variables

IV. METODOLOGÍA

4.1 TIPO Y DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto está enmarcado en el tipo de investigación básica.

El diseño de la investigación a desarrollar será no experimental y consiste en, inicialmente, estudiar la representación de un operador de rango finito como combinación lineal de operadores de rango uno, con ello definir el funcional traza sobre el ideal de operadores de rango finito. Luego, definimos la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares donde discutimos el teorema de Lidskii. A continuación, brindamos una breve discusión de la traza de Dixmier y sus propiedades. Finalmente, damos una fórmula de tipo Lidskii para las trazas de Dixmier.

4.2 MÉTODO DE LA INVESTIGACIÓN

El estudio de la investigación es de carácter científico-teórico y el método usado es del tipo inductivo - deductivo tratando de ser lo más exhaustivo posible en cada demostración. El método inductivo es usado al momento de generalizar la noción de traza para operadores de rango finito, es decir, construir la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares. Por otra parte, usando el método deductivo construimos ideales de operadores usando propiedades de los números singulares de un operador compacto.

4.3 POBLACIÓN Y MUESTRA

Dada la naturaleza de la investigación no corresponde determinar población y muestra porque no se realizará un tratamiento estadístico de datos.

4.4 LUGAR DE ESTUDIO Y PERIODO DESARROLLADO

El lugar de estudio del presente trabajo es en la Facultad de Ciencias Naturales y Matemática de la Universidad Nacional del Callao-Trabajo Remoto.

Finalmente, este trabajo de tesis fue desarrollado durante los meses de agosto, setiembre, octubre, noviembre, diciembre y enero.

4.5 TÉCNICAS E INSTRUMENTOS PARA LA RECOLECCIÓN DE DATOS

Las técnicas usadas en esta tesis son las del análisis documental y análisis de contenido ya que se revisó bibliografía (libros y artículos) relacionada a los temas tratados en este trabajo y se recopiló información obtenida vía Internet para complementar información y así enriquecer el trabajo.

Para recoger toda la información usamos páginas web como Library Genesis y Bookfi.org.

4.6 PROCESAMIENTO ESTADÍSTICO Y ANÁLISIS DE DATOS

Para el análisis del trabajo de tesis se usan diversos métodos de demostración como son el método por el absurdo, contra reciproco e inducción matemática. No hay un procesamiento de datos ya que nuestro trabajo no se ubica en el contexto estadístico.

V. RESULTADOS

Los resultados principales del trabajo son los siguientes:

1) Por el teorema 2.2.5.2 tenemos que $F(H)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{L}(H)$.
2) Por el teorema 2.2.5.4 podemos afirmar que $K(H)$ es un subespacio vectoral de $\mathcal{L}(H)$.
3) El teorema 2.2.5.6 permite establecer que $K(H)$ es un ideal bilatero de operadores del algebra $\mathcal{L}(H)$.
4) Por el corolario 2.2.5.8, todo operador de rango finito es compacto.
5) El teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos permite escribir todo operador T compacto autoadjunto de la siguiente forma

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)\langle x; x_n\rangle x_n.$$

6) El teorema espectral para operadores compactos permite escribir todo operador T compacto de la siguiente forma

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} s_n(T)\langle x; x_n\rangle y_n.$$

7) Según el corolario 2.2.7.5, el espacio de operadores de rango finito es denso en el espacio de operadores compactos.
8) Por el teorema 2.2.8.5, $(S_1(H), \|.\|_1)$ es un espacio de Banach.
9) El corolario 2.2.8.8 nos permite afirmar que el funcional lineal Tr es una traza sobre el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares.
10) El corolario 2.2.8.9 permite afirmar que:

    Sea k una función continua en $[a,b]x[a,b]$. Supongamos que para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

    donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces A es nuclear y

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A).$$

11) Por el teorema 2.2.9.4, el funcional Tr_ω es una traza singular sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$.
12) Finalmente, el resultado principal es el teorema 2.2.10.8, el cual establece que si $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H) \subset M_{1,\infty}(H)$, entonces

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n} \lambda_k(A)\right)\right).$$

5.1 RESULTADOS DESCRIPTIVOS

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística descriptiva, no se obtienen resultados descriptivos.

5.2 RESULTADOS INFERENCIALES

Siendo esta una investigación que no requirió de datos estadísticos o la aplicación de la estadística inferencial, no se obtienen resultados inferenciales.

5.3 OTROS TIPOS DE RESULTADOS ESTADÍSTICO DE ACUERDO A LA NATURALEZA DEL PROBLEMA

Por la naturaleza de nuestra investigación no se requirió de datos estadísticos o similares por lo que no se obtuvo resultado estadístico alguno.

VI. DISCUSION DE RESULTADOS

6.1 CONTRASTACIÓN Y DEMOSTRACIÓN DE LA HIPÓTESIS CON LOS RESULTADOS

1) Usando los teoremas 2.2.5.2 y 2.2.5.4 los espacios $F(H)$ son subespacios vectoriales de $\mathcal{L}(H)$, más precisamente, son ideales bilateros del algebra $\mathcal{L}(H)$.
2) Por el teorema espectral para operadores compactos autoadjuntos, todo operador T compacto autoadjunto puede escribirse de la siguiente forma

$$Tx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(T)\langle x; x_k\rangle x_k,$$

donde esta convergencia es con la norma de operadores y $(\lambda_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de autovalores de T ordenados de forma que $|\lambda_n(T)| \geq |\lambda_{n+1}(T)|, \forall n \geq 1$.

3) Por el teorema espectral para operadores compactos, todo operador T compacto puede escribirse de la siguiente forma

$$Tx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} s_k(T)\langle x; x_k\rangle y_k,$$

donde esta convergencia es con la norma de operadores y $(s_n(T))_{n\in\mathbb{N}}$ es la sucesión de números singulares de T.

4) Del corolario 2.2.7.7 y la representación Hilbert Schmidt del operador compacto T, se deduce que $s_n(T) = s_n(T^*)$.
5) Del corolario 2.2.7.5 es posible deducir que todo operador compacto puede aproximarse por una sucesión de operadores de rango finito (nos la norma de operadores).
6) Usando propiedades de números singular, es posible definir el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares y demostrar que es un espacio de Banach con la norma $\|.\|_1$.

7) Del teorema 2.2.8.7, podemos definir la traza usual Tr y demostrar que este funcional lineal es unitariamente invariante, es decir, Tr es una traza sobre el ideal $S_1(H)$.
8) Tomando un estado ω en ℓ^∞ singular e invariante por D_2, y usando el teorema 2.2.9.4, el funcional Tr_ω es una traza continua sobre el ideal $M_{1,\infty}(H)$ con la norma $\|.\|_{1,\infty}$.
9) El teorema de tipo Lidskii para trazas de Dixmier está dado en el teorema 2.2.10.8 el cual establece que si $A \in \mathcal{L}_{1,\infty}(H) \subset M_{1,\infty}(H)$, entonces

$$Tr_\omega(A) = \omega\left(\left(\frac{1}{\log(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\lambda_k(A)\right)\right).$$

Lo anterior nos dice que la traza de Dixmier de A depende de sus autovalores y multiplicidades algebraicas, esto nos da una fórmula similar al teorema de Lidskii.

6.2 CONTRASTACIÓN DE LOS RESULTADOS CON OTROS ESTUDIOS SIMILARES

En el artículo:

¨*Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016). The Lidskii trace property and the nest approximation property in Banach Spaces*¨.

se extiende la fórmula de Lidskii para espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest. Ejemplos de espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest son dados. Finalmente, espacios de Banach con la propiedad de aproximación nest son caracterizados con la propiedad de la traza de Lidskii.

6.3 RESPONSABILIDAD ÉTICA DE ACUERDO A LOS REGLAMENTOS VIGENTES

De acuerdo con los principios establecidos en el Código de ética de investigación de la Universidad Nacional del Callao aprobado por Resolución del Consejo Universitario N° 210-2017-CU del 06 de julio de 2017, en esta investigación se respetó y cumplió con las normatividades institucionales que regulan sus procesos; se actuó con todo el rigor científico para la validación, fiabilidad y credibilidad de los métodos y fuentes de consulta utilizados ejerciéndose con responsabilidad y transparencia en todo su proceso y culminación.

VII. CONCLUSIONES

1) Si T es un operador compacto autoadjunto, entonces por definición de los números singulares tenemos que $s_n(T) = \sqrt{\lambda_n(T^*T)} = \sqrt{{\lambda_n}^2(T)} = |\lambda_n(T)|$.

2) Tanto el teorema 2.2.7.3 como el teorema 2.2.7.4 permitieron expresar todo operador compacto como una suma de operadores de rango 1.

3) Usando propiedades de números singular, es posible definir el ideal $S_1(H)$ de operadores nucleares. Mas generalmente, podemos definir el siguiente ideal de operadores para $p \geq 1$
$$S_p(H) = \left\{A \in \mathcal{L}(H) : \ A \: es \: compacto \ \ y \ \ \sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A) < \infty\right\},$$
el cual es un espacio de Banach con la norma
$$\|A\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} s_n^p(A)\right)^{1/p}.$$

4) Una traza es llamada espectral si esta depende de los autovalores del operador considerado y sus multiplicidades algebraicas. Por lo tanto, del teorema de Lidskii y el teorema 2.2.10.8 podemos concluir que la traza usual y la traza de Dixmier son espectrales.
5) Cada estado ω en ℓ^∞ singular e invariante por D_2, nos permite definir una traza de Dixmier. Por lo tanto, si existe una cantidad infinita de estados con esta propiedad, existirían infinitas trazas de Dixmier.

VIII. RECOMENDACIONES

1) Dentro de un proyecto tan ambicioso como lo fue éste, siempre se desea que haya una mejora continua del mismo; por lo tanto, se recomienda a futuros estudiantes que tengan interés en el proyecto, en la línea de investigación y en la teoría de trazas.

2) El libro más completo que trata la teoría de trazas es Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000), por lo cual es recomendable su lectura para el mejor entendimiento del trabajo. De forma similar se sugiere la lectura de Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012); este texto presenta la teoría de trazas singulares y sus aplicaciones a geometría no conmutativa.

3) Existen diferentes enfoques para el estudio de trazas de Dixmier, para ello recomendamos las referencias Pietsch, A. (2017) y Pietsch, A. (2019).

4) Por el corolario 2.2.8.9, si k una función continua en $[a,b]x[a,b]$ y para todo $f \in L^2[a,b]$ se cumple que

$$\langle Af, f\rangle \geq 0,$$

donde A es el operador compacto definido por

$$(Af)(t) = \int_a^b k(t,s)f(s)ds\,;$$

entonces A es nuclear y por el teorema de Lidskii concluimos que

$$\int_a^b k(t,t)dt = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k(A) = Tr(A).$$

Esta expresión es llamada la fórmula de la traza. Extensiones de ésta fórmula en el contexto de espacios de Banach es estudiada en Johnson, W.B. and Szankowski, A. (2014), por esta razón, se recomienda su lectura.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Delgado, J., Ruzhansky, M. and Wang, B. (2016). Grothendieck-Lidskii trace formula for mixed-norm and variable Lebesgue space. *European Mathematical Society, 6*, 781-791.

Delgado, J. and Ruzhansky, M. (2016). Lp nuclearity, traces, and Grothendieck-Lidskii formula on compact Lie groups, *Jornal de Mathematiques Pures et Appliquées, 102* (1), 153-172.

Carey, A. and Sukochev, F. (2006). Dixmier Traces and some applications to noncommutative geometry, *Uspek hi mat. Nauk*,61(6(372)):45-110.

Fiegel, T. and Johnson, W.B. (2016). The Lidskii trace property and the nest approximation property in Banach Spaces, *J. Funct. Anal., 271*(3), 566-576.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Krupnik, N. (2000). *Traces and determinants of linear operators*, Basel: Birkhauser.

Gohberg, I., Goldberg, S. and Kaashoek, M. (2003). *Basic Classes of Linear Operators*, Basel: Birkhauser.

Johnson, W.B. and Szankowski, A. (2014). The trace formula in Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics, 203*, 1-16.

Kabanikhin, S.I. (2012). *Inverse and ill-posed problems: Theory and Applications*, De Gruyter.

Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012). *Singular Traces: Theory and Applications*, Berlin: De Gruyter.

Marakin, M.V. (2020). *Elementary Operator Theory*, Berlin: De Gruyter.

Pietsch, A. (2019). A new view at Dixmier Traces on $l_{1,\infty}(H)$. *Integral Equations and Operator Theory, 91* (3).

Pietsch, A. (2017). A New Approach to Operator Ideals on Hilbert Space and Their Traces. *Integral Equations and Operator Theory, 89*, 595-606.

Sukochev, F. and Usachev A. (2016). Dixmier Traces and non-commutative analysis. *Elsevier Science, 105*, 102-122.

Vasudeva H.L. (2017). *Elements of Hilbert Spaces and Operator Theory*, Singapore: Springer.

ANEXOS

ANEXO 1: MATRIZ DE CONSISTENCIA

PROBLEMA	OBJETIVOS	HIPÓTESIS	VARIABLES	METODOLOGÍA
Problema General: ¿Qué otro enfoque podríamos usar para demostrar $(*)$? **Problemas Específicos** ¿De qué manera se construyen trazas de Dixmier? ¿Qué otros funcionales traza admiten una fórmula de tipo Lidskii?	**Objetivo general.** Usar un enfoque diferente al texto Lord, S., Sukochev, F. and Zanin, D. (2012) para demostrar $(*)$. **Objetivos específicos.** Mostrar que trazas de Dixmier se construyen usando limites generalizados invariantes por dilatación. Mostrar que funcionales traza de operadores nucleares sobre espacios de Banach con la propiedad de aproximación, admiten una fórmula de tipo Lidskii.	**Hipótesis general.** Propiedades de los números singulares y el teorema de Ringrose permiten usar un enfoque diferente para demostrar (1). **Hipótesis específica.** Usando el teorema de Hahn Banach podemos garantizar la existencia de limites generalizados invariantes por dilatación que permitirán construir trazas de Dixmier. Usando el álgebra de Ruston Grothendieck de operadores nucleares sobre espacios de Banach con la propiedad de aproximación, permitirá deducir funcionales traza y su fórmula de tipo Lidskii.	**Variable dependiente** Fórmula de tipo Lidskii para funcionales traza **Variable independiente** Trazas de Dixmier	**Tipo y diseño de la investigación** De acuerdo con el propósito de la investigación, el presente proyecto está enmarcado en el tipo de investigación básica. El diseño de la investigación a desarrollar será no experimental y consiste en, inicialmente, estudiar la representación de un operador de rango finito como combinación lineal de operadores de rango uno, con ello definir el funcional traza sobre el ideal de operadores de rango finito. Luego, definimos la traza usual sobre el ideal de operadores nucleares donde discutimos el teorema de Lidskii. A continuación, brindamos una breve discusión de la traza de Dixmier y sus propiedades. Finalmente, damos una fórmula de tipo Lidskii para las trazas de Dixmier.